3.2. Классическая электронная теория проводимости.

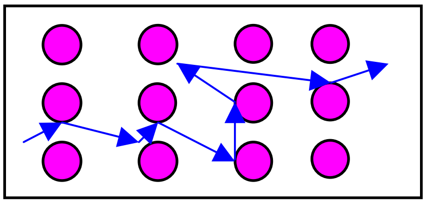
3.2.1. Модель проводника. Закон Ома.

Рассмотрим следующую модель *металла* (или проводника): в объеме, созданном положительными ионами (ионной решеткой), находятся свободные электроны, которые, можно считать, слабо связаны с ионами. В отсутствии внешнего электрического поля электроны движутся хаотически со средней кинетической энергией $\frac{m\langle v^2\rangle}{2}=\frac{3}{2}kT$. Оценим среднюю квадратичную скорость при нормальной температуре ($T = 300^oK$):

$$\sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1.38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{9\cdot 10^{-28}}}\approx\sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-28}}}\approx 10^7\frac{cm}{c}\approx 100\frac{km}{c} \quad (3.2.1)$$

Включаем внешнее электрическое поле, тогда на электрон действует сила

$$F=-eE=m\frac{dv}{dt} \quad (3.2.2)$$



Движение электрона в действительности оказывается очень сложным, т.к. упорядоченное движение накладывается на хаотическое. При этом взаимодействие электрона с решеткой играет важную роль. Полная скорость движения вдоль выбранного направления поля по оси x равна сумме хаотической скорости v_x и скорости упорядоченного движения u (скорость дрейфа):

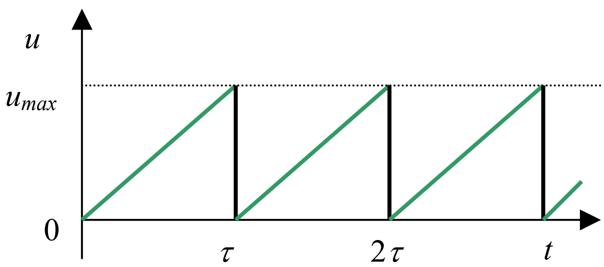
$$v=v_x+u \quad (3.2.3)$$

Более точно нужно рассматривать уравнение движения - уравнение Ньютона:

$$F_0-eE=m\frac{d}{dt}(v_x+u) \quad (3.2.4)$$

Здесь F_0 - сила со стороны ионов и других электронов, описывающая, в частности, столкновения с ними. Обычно $u << v_x$. Если усреднить уравнение (3.2.4) по всем электронам, то средняя проекция хаотической скорости равна нулю $\left\langle\frac{dv_x}{dt}\right\rangle=0$, при этом появится также средняя сила взаимодействия электронов с ионами $\langle F_0\rangle$, которая отбирает энергию у электронов, приобретенную в электрическом поле.

Нас интересует только упорядоченное движение зарядов - ток, поэтому сложную картину передачи энергии ионам (воздействие $\langle F_0\rangle$) заменим более простой. А именно, электрон ускоряется под влиянием



поля в течение времени τ, затем сталкивается с атомом (ионом) решетки и передает ему всю приобретенную энергию. А затем вновь разгоняется, сталкивается с новым ионом и т.д. Если построить график зависимости скорости u от времени, то получим пилообразную кривую. Здесь τ - время релаксации неравновесного распределения электронов (заряда) к тепловому равновесию с кристаллической решеткой, оно характеризует скорость возвращения к этому равновесию. С другой стороны, τ имеет смысл среднего времени между столкновениями, т.е. времени свободного пробега: $\tau=\frac{\langle l\rangle}{\langle v\rangle}$, где $\langle l\rangle$ - средняя длина свободного пробега, а $\langle v\rangle$ - средняя скорость беспорядочного движения.

Тогда путь, проходимый электроном от столкновения до столкновения, равен

$$S=\frac{w\tau^2}{2}=\frac{eE}{2m}\tau^2 \quad (3.2.5)$$

Средняя скорость дрейфа равна

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE}{2m}\tau = \frac{eE\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle} \qquad (3.2.6)$$

Скорость упорядоченного движения обратно пропорциональна частоте соударений $\frac{\langle v\rangle}{\langle l\rangle} = \frac{1}{\tau}$, т.е. уменьшается с ростом температуры. Итак, используя (3.2.6), получаем для плотности тока:

$$\vec{j} = \sigma_R \vec{E} = ne\vec{u} = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}\vec{E} \qquad (3.2.7)$$

Таким образом, получили закон Ома в дифференциальной форме. Из (3.2.7) для проводимости имеем следующее выражение:

$$\sigma_R = \frac{ne^2\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle} \qquad (3.2.8)$$

Проводимость прямо пропорциональна плотности носителей заряда, квадрату величины заряда и обратно пропорциональна квадратному корню из температуры: $\sigma_R \sim n, e^2, T^{1/2}$.

Часто вводится понятие *подвижности*, как отношение скорости дрейфа к напряженности электрического поля:

$$\mu = \frac{\langle u\rangle}{E} \qquad (3.2.9)$$

При этом получаем связь между подвижностью и проводимостью:

$$\vec{j} = en\langle\vec{u}\rangle = en\mu\vec{E} = \sigma_R\vec{E}$$

$$\mu = \frac{\sigma_R}{en} = \frac{e\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle} \qquad (3.2.10)$$

Опыт дает для подвижности электронов в металлах: $\mu_e \sim (10^{-4} - 10^{-3})$ $м^2/В\cdot с$ (в системе *СИ*). Тогда видно, что, в самом деле, скорость дрейфа в металлах значительно меньше средней скорости теплового движения. Если имеется несколько сортов носителей, то у каждого из них своя подвижность μ_i и тогда проводимость равна:

$$\sigma_R = \sum_i q_i n_i \mu_i \qquad (3.2.11)$$

<u>Примечание 1</u>: *Единицы измерения*: В системе *CGSE* удельное сопротивление измеряется в секундах:

$$\rho_R = \frac{E}{j} = \frac{заряд/см^2}{заряд/с\cdot см^2} = c\ .$$

Для металлов, к примеру, меди Cu, $\rho \sim 10^{-17}$ *с* (металл), для стекла $\rho \sim 10^3$ *с* (диэлектрик).

Еще о единицах заряда, тока, сопротивления и связи между ними в двух системах единиц – см в таблице:

Величины	*CGSE*	*СИ*	Связь единиц
Заряд q	$1\ CGSE_q$	$1\ Кл$	$1\ Кл = 3\cdot10^9\ CGSE_q$
Ток I	$1\ CGSE_I$	$1\ А = 1\ Кл\ /1\ с$	$1\ А = 3\cdot10^9\ CGSE_I$
Плотность тока j	$1\ CGSE_j$	$1\ А/м^2$	$1\ А/м^2 = 3\cdot10^5\ CGSE_j$
Удельное сопротивление ρ_R	$1\ CGSE_\rho = 1\ с$	$1\ Ом\cdot м$	$1\ Ом\cdot м = 1/9\cdot10^9\ 1\ CGSE_\rho$
Удельная проводимость σ_R	$1\ CGSE_\sigma = 1\ с^{-1}$	$1\ См = 1\ Ом^{-1}м^{-1}$	$1\ См = 9\cdot10^9\ 1\ CGSE_\sigma$

3.2.2. Закон Джоуля-Ленца.

Итак, за время τ электрон набирает максимальную скорость $u_{max} = w\tau = \frac{eE}{m}\frac{\langle l\rangle}{\langle v\rangle}$ и, соответственно, кинетическую энергию, равную

$$W_K = \frac{mu^2}{2} = \frac{1}{2}m\frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{m^2\langle v\rangle^2} = \frac{e^2E^2\langle l\rangle^2}{2m\langle v\rangle^2} \tag{3.2.12}$$

Частота столкновений одного электрона с атомами определяется обратным временем свободного пробега: $\frac{1}{\tau} = \frac{< v >}{< l >}$, тогда полное число соударений электронов в единице объема и в единицу времени (прямо пропорционально концентрации):

$$\nu = \frac{n\langle v\rangle}{\langle l\rangle} \tag{3.2.13}$$

Следовательно, в рамках принятой модели выделяемая теплота в единице объема за единицу времени, т.е. объемная плотность мощности

$$\frac{dw}{dt} = W_K\,\frac{n\langle v\rangle}{\langle l\rangle} = \frac{e^2n\langle l\rangle}{2m\langle v\rangle}E^2 = \sigma_R E^2 \tag{3.2.14}$$

Итак, получаем закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$\frac{\delta Q}{dtdV} = \frac{dw}{dt} = \sigma_R E^2 = \frac{j^2}{\sigma_R} = \rho_R j^2 \tag{3.2.15}$$

Мощность тепла, выделяемого в единице объема пропорциональна квадрату плотности электрического тока и обратно пропорциональна удельной проводимости.

Примечание 2: переход к обычной записи закона осуществляется интегрированием по объему провода

$$\frac{dQ}{dt} = \int\frac{j^2}{\sigma_R}dV = \int\frac{j^2}{\sigma_R}Sdl = I^2\int\frac{dl}{\sigma_R S} = I^2R \tag{3.2.16}$$

где S - поперечное сечение провода, dl - элемент длины и R сопротивление рассмотренного участка провода.

3.2.3. Закон Видемана-Франца. Недостатки классической теории.

В итоге классическая теория смогла объяснить, по крайней мере, качественно опытные законы Ома и Джоуля-Ленца. Классическая теория смогла объяснить еще один результат, который случайно хорошо согласуется с опытом, т.к. классические представления не должны были обеспечивать этого согласия. И хотя классический вывод этого соотношения неверен, сам результат оказался правильным, поэтому приведем его.

Металлы – хорошие проводники не только электричества, но и тепла. В рамках той же модели металла переносчиками электричества и тепла в металлах являются одни и те же частицы. Поэтому основной механизм теплопроводности должны обеспечивать квазисвободные электроны. При этом роль ионов в переносе тепла пренебрежимо мала. В курсе Молекулярной физики (см Глава 5, §5.3) было получено следующее выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3}n\langle v\rangle\langle l\rangle\frac{i}{2}k = \frac{1}{3}\langle v\rangle\lambda\rho C_V = \frac{1}{3}n\langle v\rangle\lambda c_V \tag{3.2.17}$$

где $\langle l\rangle = \lambda$ - длина свободного пробега электрона, c_V – теплоемкость на 1 электрон, i - число степеней свободы ($i = 3$ для электрона). Найдем отношение коэффициента теплопроводности (3.2.17) и удельной электропроводности (3.2.8):

$$\frac{\chi}{\sigma}=\frac{\frac{1}{3}n\langle v\rangle\lambda\frac{3}{2}k}{\frac{1}{2}\frac{e^2n}{m}\frac{\lambda}{\langle v\rangle}}=\frac{m\langle v\rangle^2k}{e^2} \tag{3.2.18}$$

Так как средняя скорость есть среднеквадратичная скорость, то $\frac{m\langle v\rangle^2}{2}=\frac{3}{2}kT$ и тогда отношение (3.2.18) принимает вид:

$$\frac{\chi}{\sigma}=3\left(\frac{k}{e}\right)^2T \tag{3.2.19}$$

Это закон Видемана-Франца – отношение коэффициента теплопроводности и удельной электропроводности для всех металлов одно и то же: $\frac{\chi}{\sigma}=2.23\cdot10^{-8}T$ (Густав Генрих Видеман, немецкий физик, 1826–1899, Р.Франц, немецкий физик).

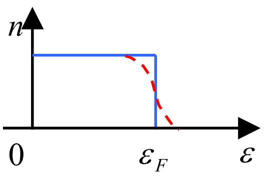
Оказалось, что закон Видемана-Франца находится в хорошем согласии с опытом. Как далее оказалось, это согласие - случайное. Здесь мы не учитывали Максвелловское распределение электронов по скоростям. Лоренц учел его и получил вместо “3” фактор “2”, что только ухудшило согласие с экспериментом. Квантовая теория (Зоммерфельд) дала коэффициент $\pi^2/3$, что хорошо совпадает с классическим результатом “3”.

Вообще классическая модель наглядна и дает правильные зависимости, выражаемые законами Ома, Джоуля-Ленца, Видемана-Франца. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Рассмотрим, в чем состоят основные *расхождения* и недостатки классической теории:

1) Оказалось, что чтобы получить правильные значения электропроводности σ_R, необходимо принимать очень большие значения длины свободного пробега электронов, на три порядка превышающие межатомные расстояния, что не находит убедительного объяснения в классической физике.
2) Классическая теория предсказывает также другую зависимость проводимости от температуры $\sigma_R\sim\frac{1}{\sqrt{T}}$, в то время как эксперимент дает $\sigma_R\sim\frac{1}{T}$.
3) В теплоемкость металлического проводника, согласно “классике”, аддитивный вклад вносят электронный газ $C_v=\frac{3}{2}R$ и решетка $C_v=3R$ (закон Дюлонга и Пти), что в сумме дает $C_v=\frac{9}{2}R$.

   Однако этот результат не находит подтверждения в эксперименте.

Квантовая физика позволяет устранить эти расхождения. Прежде всего, необходимо учитывать различие в поведении микрочастиц и обычных макрочастиц. Квантовая физика допускает, как называли ранее, “дуализм” в поведении микрочастиц, т.е. приписывает им корпускулярные и волновые свойства.



Именно последние позволяют “обтекать” атомы без столкновений, что приводит к увеличению длины свободного пробега электронов. Распределение электронов по энергиям подчиняется квантовой статистике Ферми-Дирака (см рисунок) (Энрико Ферми, итальянский физик, 1901–1954, Нобелевская премия 1938 г. за открытие искусственной радиактивности; Поль Адриен Морис Дирак, английский физик-теоретик, 1902–1984?, в 1933 г. - Нобелевская премия за создание квантовой механики). В образовании электронной проводимости и теплоемкости участвует лишь малая часть электронов, имеющих энергии вблизи уровня Ферми. Именно поэтому электронный газ не вносит существенного вклада в теплоемкость и теплоемкость близка к закону Дюлонга-Пти (Пьер Луи Дюлонг, французский физик и химик, 1785–1838; Алексис Терез Пти, французский физик, 1791–1820). Квантовая физика предсказывает для температурной зависимости проводимости $\sigma_R\sim\frac{1}{T}$, что и наблюдается в эксперименте. При сверхнизких температурах (ниже $20\ K$) в металлах наблюдается явление сверхпроводимости, открытое еще в начале века. Однако в конце 80-х годов была обнаружена сверхпроводимость при температурах 90-160 K, причем на керамических материалах. Подобные явления уже не вписываются в картину представлений классической физики, а являются прерогативой физики квантовой. Позже мы вернемся к этим явлениям.

Отметим также, что в различных средах – твердых телах, жидкостях, газах, вакууме – реализуется, в принципе, различный механизм проводимости.