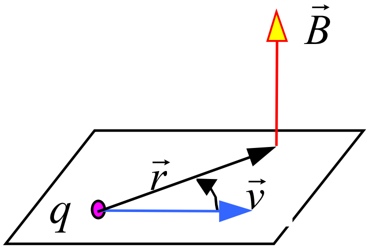
3.5. Поле движущегося заряда. Закон Био-Савара.

3.5.1.Магнитное поле движущегося заряда.

Если точечный заряд покоится, то он создает в окружающем его пространстве только электрическое поле. Это поле изотропное, и положение заряда определяет центр симметрии электростатического поля. Если заряд движется со скоростью $\vec{v}$, то в пространстве появляется выделенное направление, связанное с направлением этого движения. Поэтому магнитное поле, появляющееся в результате движения заряда, имеет осевую (или аксиальную) симметрию.



В результате обобщения экспериментальных данных был получен фундаментальный закон: точечный заряд q, равномерно движущийся с малой (нерелятивистской $v << c$) скоростью, создает в окружающем пространстве магнитное поле:

$$\vec{B} = k\frac{q[\vec{v},\vec{r}]}{r^3} \qquad (3.5.1)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения. Конец радиус-вектора $\vec{r}$ неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{v}$, поэтому вектор $\vec{B}$ в данной системе отсчета зависит не только от положения точки наблюдения, но и от времени. В соответствии с (3.5.1) вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$, причем вращение вокруг вектора $\vec{v}$ в направлении вектора $\vec{B}$ образует с направлением $\vec{v}$ правовинтовую систему. Таким образом, по своим свойствам вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ - аксиальный вектор (псевдовектор). При обращении времени меняется направление скорости и соответственно меняется направление магнитного поля.

Примечание 1: В системе $CGSE$ (Гаусса) коэффициент $k = \frac{1}{c}$, в системе $СИ$: $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$.

Электрическое поле неподвижного и движущегося с нерелятивистской скоростью заряда определяется тем же законом Кулона $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$, тогда магнитное поле, созданное таким движущимся зарядом, может быть записано через напряженность электрического поля:

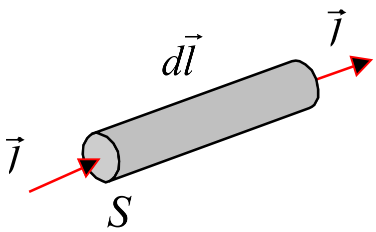
$$\vec{B} = k[\vec{v},\vec{E}] = \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{E}] \qquad (3.5.2)$$

Закон (3.5.1) положен в основание теории магнетизма, хотя исторически первым экспериментально было получено выражение для магнитного поля, создаваемого прямым током.

3.5.2. Магнитное поле тока.

Вычислим магнитное поле, создаваемое элементом тока I длиной dl. Число носителей в этом элементе: $nSdl = ndV$, где n - концентрация носителей. Каждый носитель заряда q согласно (3.5.1) создает в окружающем пространстве магнитное поле:

$$\vec{B}_q = \frac{q}{c}\frac{[(\vec{v}+\vec{u}),\vec{r}]}{r^3}, \qquad (3.5.3)$$



где $\vec{v}$ скорость хаотического движения, а $\vec{u}$ скорость направленного движения (дрейфа). Вычисляя магнитное поле элемента тока, мы будем исходить из установленного опытным путем *принципа суперпозиции*. Следуя этому принципу, мы будем считать, что каждый заряд q возбуждает поле, совершенно не зависящее от наличия других зарядов. Усредняя по всем носителям, заключенным в объеме dV,

$$\langle \vec{B}_q \rangle = \frac{q}{c}\frac{[\vec{u},\vec{r}]}{r^3}, \qquad \langle \vec{v} \rangle = 0 \qquad (3.5.4)$$

и умножая на их количество, мы получим магнитное поле созданное элементом тока:

$$d\vec{B} = \left\langle \vec{B}_q \right\rangle nSdl\,;$$

$$d\vec{B} = \frac{qn}{c}\frac{[\vec{u},\vec{r}]}{r^3}dV = \frac{1}{c}\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}dV \qquad (3.5.5)$$

Итак, получили *закон Био-Савара* (Жан Батист Био – французский физик, 1774-1862; Феликс Савар – французский физик, 1791-1841) – магнитное поле, создаваемое объемным элементом тока, определяется выражением:

$$d\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{[\vec{j},\vec{r}]}{r^3}dV\,; \qquad (3.5.6)$$

а магнитное поле от линейного элемента тока равно:

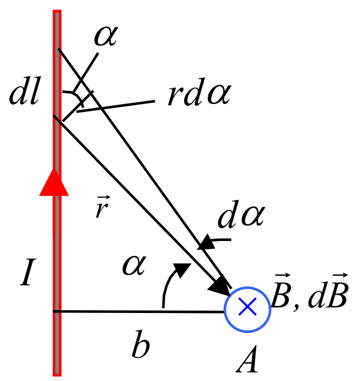
$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{[d\vec{l},\vec{r}]}{r^3}. \qquad (3.5.7)$$

Именно последнее выражение было получено исторически первым, а затем из него автоматически может быть получена запись этого закона в виде (3.5.1).

3.5.3. Примеры магнитных полей.

1) *Магнитное поле прямого тока*

Вычислим магнитное поле прямого тока I, т.е. тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины. Согласно закону Био-Савара в произвольно выбранной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление – с правой стороны от прямого тока за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей dB, причем $Sin(\angle(d\vec{l},\vec{r})) = Cos\alpha$, и тогда поле от элемента тока $d\vec{l}$ равно:



$$dB = \frac{1}{c}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2} \qquad (3.5.8)$$

Из рисунка следует, что $dl\cos\alpha = rd\alpha$ и $r = b/\cos\alpha$. Поэтому

$$dB = \frac{1}{c}\frac{I\cos\alpha d\alpha}{b}. \qquad (3.5.9)$$

Интегрируя последнее выражение по всем элементам бесконечно длинного тока, что эквивалентно интегрированию по углу α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим индукцию магнитного поля прямого тока:

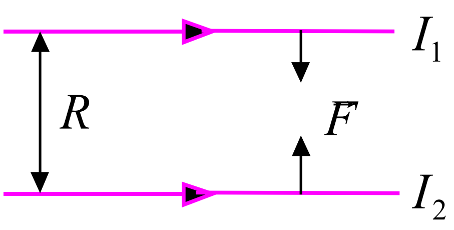
$$B = \frac{2I}{cb} \qquad (3.5.10)$$

Примечание 2: в системе *СИ* магнитное поле прямого тока равно $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b}$.

---

2) *Сила взаимодействия 2-х параллельных токов*

Пусть имеем два параллельных тока, расположенных на расстоянии R. Поле, создаваемое прямым током I_1, согласно (3.5.10) равно



$$B = \frac{2I_1}{cR}.$$

Тогда сила, действующая на элемент dl прямого тока I_2 со стороны первого тока, равна

$$dF = \frac{1}{c} I_2 B dl = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 R} dl.$$

Итак, сила взаимодействия (притяжения или отталкивания зависит от взаимного направления токов) на единицу длины проводника равна:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 R} \qquad (3.5.11)$$

Примечание 3. Сила взаимодействия 2-х токов на единицу длины в системе *СИ* записывается:

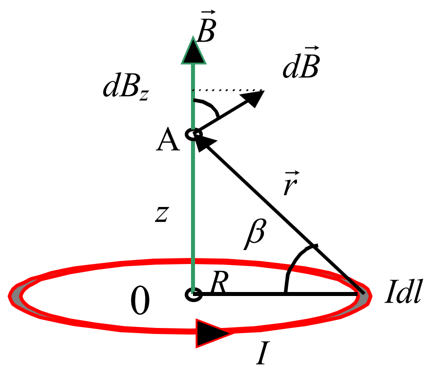
$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}.$$

Это соотношение используется для определения единицы тока в системе *СИ* – Ампера (см ниже п.3.5.4).

---

3) *Магнитное поле кругового тока*

Выделим на круговом контуре с током (на рис. справа) элемент тока Idl. Этот элемент будет создавать в точке A поле $d\vec{B}$. Все элементы кругового тока будут создавать в рассматриваемой точке конус векторов индукции $d\vec{B}$. Понятно, что в результате осевой симметрии результирующий вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого в точке A круговым током, будет направлен вверх по оси z. Поэтому для нахождения модуля вектора $\vec{B}$ надо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось z. Каждая такая проекция равна



$$dB_z = dB \cos\beta = \frac{1}{c}\frac{Idl}{r^2}\cos\beta,$$

где учтено, что угол между элементом $d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$ равен $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя это выражение по dl (это дает $2\pi R$), и, учитывая, что $\cos\beta = R/r$, $r = \left(\sqrt{z^2 + R^2}\right)^{1/2}$, получаем, что поле на оси витка на расстоянии z от его центра равно:

$$B = \frac{1}{c}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \qquad (3.5.12)$$

В частности, в центре витка имеем магнитную индукцию:

$$B_{z=0} = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R} \qquad (3.5.13)$$

Примечание 4. В системе *СИ* имеем $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$ и в центре витка $B_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

3.5.4. О системах единиц.

Закон взаимодействия токов (3.5.11) послужил основой для определения электромагнитных единиц.

1) Рассмотрим вначале, как строится система *СГСЭ* (*CGSE*). Основные единицы: *см*, *г*, *с* и *единица заряда* $CGSE_q$ из закона Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$. Следовательно, магнитные величины уже не произвольны. Так, сила, действующая на 1 длины провода, равна

$$f = \frac{dF}{dl} = k\frac{2 I_1 I_2}{R}$$

и отсюда получаем, что константа k имеет размерность. Ее размерность легко определить (размерность R и dl совпадают):

$$[k]=\frac{[F]}{[I]^2}=\frac{\text{сила}}{\text{квадрат тока}}=\frac{\left[q^2/r^2\right]}{\left[q/t\right]^2}=\left[\frac{t}{r}\right]^2=\frac{\text{квадрат времени}}{\text{квадрат длины}}=\frac{c^2}{\text{см}^2} \qquad (3.5.14)$$

То есть размерность k равна обратному квадрату скорости. Опыты показали, что

$$k=\frac{1}{c^2}. \qquad (3.5.15)$$

Здесь c - *электродинамическая постоянная*, которая равна скорости света в вакууме $c \approx 3\cdot 10^{10}$ *см/с*. Максвелл показал, что свет - это электромагнитная волна. Далее отсюда строятся все магнитные единицы в системе *СГСЭ*.

2) Система *СГСМ* (*CGSM*) строится также как *СГСЕ* - основные механические единицы те же: *см*, *г*, *с*, но дальше для введения электромагнитных единиц измерения используют закон взаимодействия токов в виде

$$f=\frac{2I_1I_2}{R} \qquad (3.5.16)$$

Здесь $k = 1$ и (3.5.16) используется для определения единицы тока: 1 $CGSM_{\text{тока}}$. Единица тока 1 $CGSM_I$ (=1 *Био*) равна такому току, который, протекая по бесконечному проводу, действует на параллельный такой же ток, находящийся на расстоянии в 1 *см*, с силой в 2 *Дн*. Итак, в этой системе основной единицей электромагнитных величин является *единица тока*. Тогда в системе *CGSM* имеем законы Ампера и Био-Савара без дополнительных коэффициентов:

$$\vec{F}=q\left[\vec{v},\vec{B}\right], \qquad \vec{B}=\frac{q}{r^3}\left[\vec{v},\vec{r}\right] \qquad (3.5.17)$$

Здесь заряды измерены в системе *СГСМ* ($CGSM_q$). Уравнения (3.5.17) служат для определения единицы индукции поля в *CGSM* – 1 *Гс* (*Гаусс*): 1 *Гс* – один Гаусс есть индукция такого магнитного поля, которое действует на заряд в 1 $CGSM_q$ с силой в 1 *Дн*, если заряд движется перпендикулярно магнитному полю со скоростью 1 *см/с*.

$$B=\frac{qv}{r^2}, \qquad 1\text{Гс}=\frac{[q]\cdot[v]}{[r]^2}=\frac{1CGSM_q\cdot 1\,\text{см}/\text{с}}{\text{см}^2}=\frac{1CGSM_q}{\text{см}\cdot\text{с}}$$

$$F=qvB, \qquad 1\text{Дн}=1CGSM_q\cdot 1\,\text{см}/\text{с}\cdot 1\text{Гс}$$

Исключая отсюда единицу заряда, получим:

$$[B]=[F]^{1/2}[r]^{-1}, \qquad 1\text{Гс}=\frac{1\text{Дн}^{1/2}}{\text{см}}=1\text{г}^{1/2}\text{см}^{-1/2}\text{с}^{-1}$$

Аналогично получаем все магнитные единицы в системе *СГСМ*.

3) Система *СИ* – основные единицы: *м*, *кг*, *с* и *сила тока* измеряется в *А* (Амперах). Основа определения силы тока является уравнение:

$$f=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{r} \qquad (3.5.18)$$

Ампер - это сила тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии в 1 *м* в вакууме, вызвал бы силу на 1 *м* каждого проводника, равную $2\cdot 10^{-7}$ *Н*. Откуда получаем для коэффициента μ_0 следующее значение:

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} = 1.26\cdot 10^{-6}\ \text{Г/м} \qquad \left(\text{Генри/метр},\ 1\text{Г}=\frac{1\text{м}^2\cdot\text{кг}}{A^2\cdot c^2}\right).$$

Единица измерения магнитной индукции – 1 *Тс* (*Тесла*), которая, как уже упоминалось в § 3.4, определяется из уравнения $\vec{F}=q\left[\vec{v},\vec{B}\right]$, где все величины записаны в системе *СИ*. Отсюда определяются также все остальные магнитные величины.

4) Запишем связь между единицами заряда и тока в рассмотренных системах единиц. Из сравнения (3.5.11) и (3.5.16) в системах *СГСЕ* и *СГСМ*, а также уравнение (3.5.18) в системе *СИ* с учетом определения Ампера и значения константы μ_0, получаем связь между единицами тока:

$$1\,Био = 1CGSM_I = c\cdot 1CGSE_I \approx 3\cdot 10^{10}\cdot 1CGSE_I = 10\,A$$

Единицы заряда связаны соответственно:

$$1CGSM_q = c\cdot 1CGSE_q \approx 3\cdot 10^{10}\,CGSE_q = 10\,Кл$$

Итак, основные выводы.

Система *CGSE* (*СГСЕ*) используется для измерения чисто электрических величин: заряд, напряженность и индукция электрического поля, электрического потенциала, емкости, электропроводности и т.д.

Система *CGSM* (*СГСМ*) используется для измерения чисто магнитных величин: напряженность и индукция магнитного поля, магнитного потока, коэффициентов индукции и самоиндукции, магнитных моментов и т.д.

Гаусс объединил эти системы единиц, *Гауссова система единиц*: все электрические величины (q, I, E, D,…) измеряются в единицах *CGSE*, а магнитные величины (B, H, L, M,…) – в единицах *CGSM*. В этой системе единиц в формулы, куда входят одновременно магнитные и электрические величины, пишут множитель $1/c$ на каждую величину тока I и заряда q. Этот множитель превращает величины I и q, выраженные в единицах *CGSE*, в значения этих величин, выраженные в системе *CGSM*.

Итак, в системе единиц Гаусса соотношения с участием магнитного поля и тока записываются:

$$\vec{B} = \frac{q}{c}\frac{[\vec{v},\vec{r}]}{r^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}], \qquad d\vec{F} = \frac{I}{c}[d\vec{l},\vec{B}], \qquad f = \frac{2I_1 I_2}{c^2 a}$$

Фактически мы использовали Гауссову систему единиц при написании формул во всех предыдущих параграфах.