ГЛАВА 9
Электростатика

Основные законы и формулы

- Закон сохранения электрического заряда в замкнутой системе

$$\sum_i Q_i = \text{const}.$$

- Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \text{ (в вакууме)}, \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{\varepsilon r^2} \text{ (в среде)}$$

[F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2; r — расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость среды].

- Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$$

[$\vec{F}$ — сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля].

- Напряженность электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

- Принцип суперпозиции электростатических полей

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

[$\vec{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i].

- Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

■ Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

■ Плотность зарядов линейная, поверхностная и объемная, т. е. заряд, приходящийся соответственно на единицу длины, поверхности и объема:

$$\tau = \frac{dQ}{dl}; \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}; \quad \rho = \frac{dQ}{dV}.$$

■ Потенциальная энергия заряда Q_0 в поле заряда Q на расстоянии r от него

$$W_п = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ_0}{r}.$$

■ Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W_п}{Q_0}, \qquad \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

[$W_п$ — потенциальная энергия пробного положительного заряда Q_0; A_∞ — работа по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность].

■ Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

■ Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2,

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2}\right);$$

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2).$$

■ Разность потенциалов между двумя точками 1 и 2 электростатического поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0}.$$

■ Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

[φ_i — потенциал поля, создаваемого зарядом Q_i].

■ Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

[Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника].

■ Электроемкость шара радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

■ Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

[Q — заряд, накопленный на обкладках конденсатора; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между обкладками].

■ Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

[S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами].

■ Электроемкость системы конденсаторов соответственно при последовательном и параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \quad \text{и} \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

[C_i — электроемкость i-го конденсатора; n — число конденсаторов].

■ Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

■ Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[Q — заряд конденсатора; C — его электроемкость; $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между обкладками].

■ Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$$

[S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора].

■ Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 Два одинаковых шарика одинаковой массы и заряда, подвешенные на нитях равной длины, опускают в трансформаторное масло, плотность которого $\rho = 0{,}94$ г/см^3 и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2{,}2$. Определите плотность ρ_1 материала шариков, если углы расхождения нитей в воздухе и в масле оказались одинаковыми.

$\rho = 0{,}94$ г/см^3 $= 0{,}94 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\varepsilon = 2{,}2$
$l_1 = l_2 = l$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

ρ_1 — ?

Решение. До погружения в жидкий диэлектрик, т. е. в воздухе, на каждый шарик (рис. 69, *а*) действуют сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = 0.$$

После погружения в жидкий диэлектрик (в трансформаторное масло) на каждый шарик (рис. 69, *б*) действует сила тяжес-

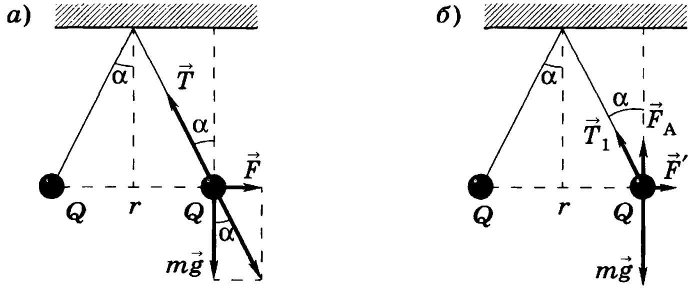

Рис. 69

ти $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}'$, выталкивающая сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F}' + \vec{F}_A + \vec{T}_1 = 0.$$

Кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе (из треугольника на рис. 69, *а*)

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha; \tag{1}$$

кулоновская сила в диэлектрике

$$F' = (mg - F_A)\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{2}$$

(учли выталкивающую (архимедову) силу). В диэлектрике кулоновская сила уменьшается в ε_1 раз, так что

$$F' = \frac{F}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{F}{\varepsilon} = (mg - F_A)\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4}$$

Поделив выражение (4) на выражение (1), получим

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{mg - F_A}{mg} = 1 - \frac{F_A}{mg}. \tag{5}$$

Согласно закону Архимеда,

$$F_A = \rho V g,$$

где ρ — плотность жидкого диэлектрика, V — объем шарика, g — ускорение свободного падения. Масса шарика $m = \rho_1 V$, где ρ_1 — плотность материала шарика. Подставив последние два выражения в формулу (5), получим

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{\rho}{\rho_1},$$

откуда искомая плотность материала шарика

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\varepsilon\rho}{\varepsilon - 1}}$$

Ответ: $\rho_1 = 1{,}72$ г/см^3.

2 Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностными плотностями σ_1 = $= 4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 1$ мкКл/м^2. Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей.

$\sigma_1 = 4$ мкКл/м^2 $= 4 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2
$\sigma_2 = 1$ мкКл/м^2 $= 10^{-6}$ Кл/м^2
E — ?

Решение. Согласно принципу суперпозиции,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

причем каждая из заряженных плоскостей создает электростатическое поле независимо от наличия другой заряженной плоскости (рис. 70).

Напряженность электростатического поля, создаваемого каждой из бесконечных плоскостей в вакууме:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Между плоскостями линии вектора напряженности направлены в противоположные стороны, следовательно, суммарная напряженность поля равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0},$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}}$$

В пространстве за пределами плоскостей линии вектора напряженности сонаправлены, следовательно, суммарная напряженность поля равна сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E = E_1 + E_2$$

и

$$\boxed{E = \mp\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}}$$

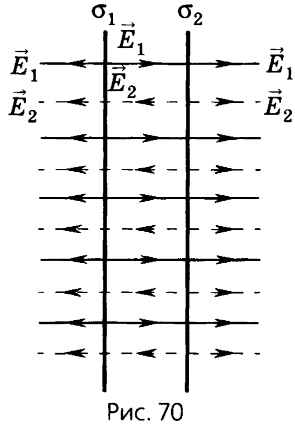

Рис. 70

(векторы $\vec{E}$ за пределами плоскостей направлены в разные стороны).

$$[E] = \frac{\text{Кл}/\text{м}^2}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: 1) $E = 169$ кН/Кл; 2) $E = \mp 282$ кН/Кл.

3 Две параллельные пластины площадью $S = 100$ см^2 каждая, находящиеся в воздухе, заряжены разноименными зарядами $Q = 70$ нКл. Определите работу A, которую следует совершить, чтобы раздвинуть пластины на расстояние $\Delta x = 0,1$ мм.

$S = 100\ \text{см}^2 = 10^{-2}\ \text{м}^2$
$Q = 70\ \text{нКл} = 7\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}$
$\Delta x = 0,1\ \text{мм} = 10^{-4}\ \text{м}$

A — ?

Решение. Для раздвижения пластин на расстояние Δx следует совершить работу

$$A = F\Delta x, \qquad (1)$$

где сила

$$F = QE, \qquad (2)$$

Q — заряд одной пластины, E — напряженность электростатического поля, создаваемого одной из пластин. Имеем

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \qquad (3)$$

где $\sigma = \frac{Q}{S}$ — поверхностная плотность заряда.

Подставив формулы (2) и (3) в выражение (1), найдем искомую работу

$$\boxed{A = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta x}$$

$$[A] = \frac{\text{Кл}^2\cdot\text{м}}{\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)\cdot\text{м}^2} = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 2,77$ мкДж.

4 Три точечных заряда $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл и $Q_3 = -4$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см (рис. 71). Определите потенциальную энергию этой системы.

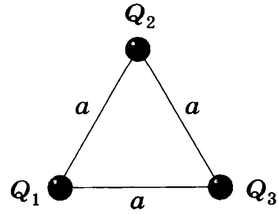

Рис. 71

$Q_1 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл
$Q_2 = 3$ нКл $= 3 \cdot 10^{-9}$ Кл
$Q_3 = -4$ нКл $= -4 \cdot 10^{-9}$ Кл
$a = 10$ см $= 0{,}1$ м

U — ?

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т. е.

$$W_п = W_{п12} + W_{п13} + W_{п23}, \quad (1)$$

где потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, соответственно равны

$$W_{п12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a}; \quad W_{п13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{a}; \quad W_{п23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2 Q_3}{a}. \quad (2)$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$\boxed{W_п = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} (Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3)}$$

$$[W_п] = \frac{Кл^2}{Кл^2/(Н \cdot м^2) \cdot м} = Н \cdot м = Дж.$$

Ответ: $W_п = -1{,}26$ мкДж.

5 Батарея из трех последовательно соединенных конденсаторов $C_1 = 1$ мкФ; $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 4$ мкФ подсоединена к источнику ЭДС. Заряд батареи конденсаторов $Q = 40$ мкКл. Определите: 1) напряжения U_1, U_2 и U_3 на каждом конденсаторе; 2) ЭДС источника; 3) электроемкость батареи конденсаторов.

$C_1 = 1$ мкФ $= 10^{-6}$ Ф
$C_2 = 2$ мкФ $= 2 \cdot 10^{-6}$ Ф
$C_3 = 4$ мкФ $= 4 \cdot 10^{-6}$ Ф
$Q = 40$ мкКл $= 4 \cdot 10^{-5}$ Кл

U_1 — ? U_2 — ? U_3 — ?
$\mathcal{E}$ — ?
C — ?

Решение. При последовательном соединении конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, поэтому

$$Q_1 = Q_2 = Q.$$

Напряжения на конденсаторах

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

ЭДС источника равна сумме напряжений каждого из последовательно соединенных конденсаторов

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 + U_3.$$

9 — 7165

При последовательном соединении суммируются величины, обратные электроемкостям каждого из конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Таким образом, искомая электроемкость батареи конденсаторов

$$\boxed{C = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}}$$

Ответ: 1) $U_1 = 40$ В; $U_2 = 20$ В; $U_3 = 10$ В; 2) $\mathcal{E} = 70$ В; 3) $C = 0{,}571$ мкФ.

6 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин конденсатора $S = 200$ см^2, расстояние между ними $d_1 = 1{,}5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15$ мм. Определите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения до раздвижения: 1) отключался; 2) не отключался.

$U_1 = 500$ В
$S = 200$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2
$d_1 = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 15$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

1) W_1 — ? W_2 — ?
2) W_1 — ? W_2 — ?

Решение. 1) Заряд пластин конденсатора, *отключенного от источника напряжения*, при их раздвижении не меняется, т. е.

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}. \qquad (1)$$

Электроемкость конденсатора и напряжение на нем соответственно с учетом (1):

до раздвижения пластин

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}; \qquad U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Qd_1}{\varepsilon_0 \varepsilon S}; \qquad (2)$$

после раздвижения пластин

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2}; \qquad U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Qd_2}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \qquad (3)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2}, \qquad (4)$$

откуда, учитывая формулу для C_1, получаем

$$\boxed{W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_1^2}{2d_1}}$$

Разделив почленно (2) на (3), найдем

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

откуда

$$U_2 = \frac{d_2}{d_1} U_1. \qquad (5)$$

Тогда

$$\boxed{W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S d_2^2 U_1^2}{2 d_2 d_1^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S d_2 U_1^2}{2d_1^2}}$$

$$[W] = \frac{\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{В}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{(\text{Дж})^2 \cdot \text{м}}{\text{Дж} \cdot \text{м}} = \text{Дж}.$$

2) Разность потенциалов на пластинах конденсатора, *не отключенного от источника напряжения*, остается постоянной, т. е.

$$U_1 = U_2 = U = \text{const}. \qquad (6)$$

Подставив в формулу (4) выражения для C_1 и C_2 из (2) и (3) и учитывая (6), найдем искомые энергии

•

$$\boxed{W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d_1}}$$

$$\boxed{W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d_2}}$$

Ответ: 1) $W_1 = 14{,}8$ мкДж; $W_2 = 148$ мкДж; 2) $W_1 = 14{,}8$ мкДж; $W_2 = 1{,}48$ мкДж.

7 Плоский воздушный конденсатор электроемкостью $C_1 = 4$ пФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 500$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между обкладками конденсатора увеличили в три раза. Определите: 1) разность потенциалов U_2 на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин.

$C_1 = 4$ пФ $= 4 \cdot 10^{-12}$ Ф
$U_1 = 500$ В
$d_2 = 3d_1$

1) U_2 — ?
2) A — ?

Решение. Заряд обкладок конденсатора после отключения от источника напряжения не меняется, т. е. $Q = \text{const}$. Поэтому

$$C_1 U_1 = C_2 U_2, \tag{1}$$

где C_2 и U_2 — соответственно электроемкость и разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения.

Учитывая, что электроемкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, из формулы (1) получим искомую разность потенциалов

$$\boxed{U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1 = \frac{d_2}{d_1} U_1} \tag{2}$$

После отключения конденсатора от источника напряжения систему двух заряженных обкладок можно рассматривать как замкнутую, для которой выполняется закон сохранения энергии: работа A внешних сил равна изменению энергии системы

$$A = W_2 - W_1, \tag{3}$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия поля конденсатора в начальном и конечном состоянии.

Учитывая, что $W_1 = \dfrac{Q^2}{2C_1}$ и $W_2 = \dfrac{Q^2}{2C_2}$ ($Q = \text{const}$), из формулы (3) получим искомую работу внешних сил

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_1^2 U_1^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{C_1 U_1^2}{2}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)$$

[учли, что $Q = C_1 U_1$ и формулу (2)].

$$\boxed{A = \frac{C_1 U_1^2}{2}\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)}$$

$$[A] = Ф \cdot В^2 = \frac{Кл}{В} \cdot В^2 = Кл \cdot В = Дж.$$

Ответ: 1) $U_2 = 1{,}5$ кВ; 2) $A = 1$ мДж.