Потенциал электрического поля

Темы кодификатора ЕГЭ: потенциальность электростатического поля, потенциал электрического поля, разность потенциалов.

Мы начнём с обсуждения потенциальной энергии, которую имеет заряд в электростатическом поле. Прежде всего необходимо вспомнить, при каких условиях можно вообще ввести понятие потенциальной энергии.

Консервативные силы

Сила называется *консервативной* (или *потенциальной*), если работа этой силы не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела.

Пусть, например, тело под действием консервативной силы $\vec{F}$ переместилось из начальной точки 1 в конечную точку 2 (рис. 1). Тогда работа A силы $\vec{F}$ зависит только от положения самих точек 1 и 2, но не от траектории движения тела. Например, для траекторий $1 \to a \to 2$ и $1 \to b \to 2$ величина A будет одинаковой.

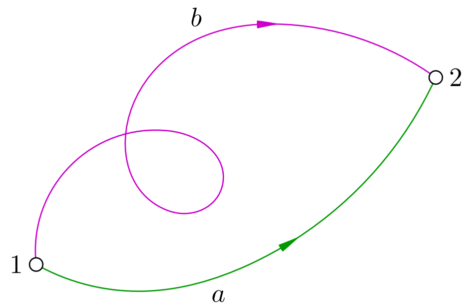

Рис. 1. К понятию консервативной силы

Отметим, что *работа консервативной силы по любому замкнутому пути равна нулю*. Действительно, давайте выйдем из точки 1 по траектории $1 \to a \to 2$ и вернёмся назад по траектории $2 \to b \to 1$. На первой траектории сила совершит работу A, а на второй траектории работа будет равна $-A$. В итоге суммарная работа окажется нулевой.

Так вот, понятие потенциальной энергии можно ввести только в случае консервативной силы. *Потенциальная энергия* W — это математическое выражение, зависящее от координат тела, такое, что работа силы равна изменению этого выражения со знаком минус:

$$A = -\Delta W. \tag{1}$$

Или, что то же самое:

$$A = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2.$$

Как видим, работа консервативной силы есть разность значений потенциальной энергии, вычисленных соответственно в начальном и конечном положении тела.

Примеры консервативных сил вам хорошо известны. Например, сила тяжести является консервативной. Сила упругости пружины тоже консервативна. Именно поэтому мы можем говорить о потенциальной энергии тела, поднятого над землёй, или о потенциальной энергии деформированной пружины.

А вот сила трения не консервативна: работа силы трения зависит от формы траектории и не равна нулю на замкнутом пути. Поэтому не существует никакой «потенциальной энергии тела в поле силы трения».

Потенциальность электростатического поля

Оказывается, что сила, с которой электростатическое поле действует на заряженное тело, также является консервативной. Работа этой силы, совершаемая при перемещении заряда, называется *работой электростатического поля*. Имеем, таким образом, важнейший факт:

Работа электростатического поля не зависит от формы траектории, по которой перемещается заряд, и определяется лишь начальным и конечным положениями заряда. Работа поля по замкнутому пути равна нулю.

Этот факт называется также *потенциальностью* электростатического поля. Как и поле силы тяжести, электростатическое поле является *потенциальным*. Работа электростатического поля одинакова для всех путей, по которым заряд может двигаться из одной фиксированной точки пространства в другую.

Строгое математическое доказательство потенциальности электростатического поля выходит за рамки школьной программы. Однако «на физическом уровне строгости» мы можем убедиться в справедливости этого факта с помощью следующего простого рассуждения.

Нетрудно видеть, что если бы электростатическое поле не было потенциальным, то можно было бы построить вечный двигатель! В самом деле, тогда существовала бы замкнутая траектория, при перемещении заряда по которой поле совершало бы положительную работу (и при этом никаких изменений в окружающих телах не происходило бы). Крутим себе заряд по этой траектории, черпаем неограниченное количество энергии ниоткуда — и все энергетические проблемы человечества решены :-) Но такого, увы, не наблюдается — это вопиющим образом противоречит закону сохранения энергии.

Так как электростатическое поле потенциально, мы можем говорить о потенциальной энергии заряда в этом поле. Начнём с простого и важного случая.

Потенциальная энергия заряда в однородном поле

Потенциальная энергия тела, поднятого над землёй, равна mgh. Случай заряда в однородном поле оказывается очень похожим на эту механическую ситуацию.

Рассмотрим однородное электростатическое поле E, линии напряжённости которого направлены вдоль оси X (рис. 2). Пусть положительный заряд q перемещается вдоль силовой линии из точки 1 (с координатой x_1) в точку 2 (с координатой x_2).

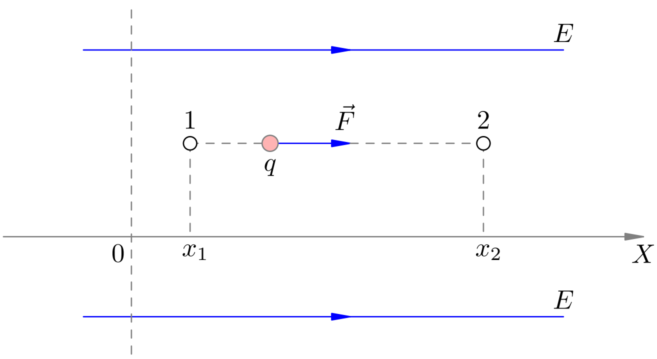

Рис. 2. Перемещение заряда в однородном поле

Поле действует на заряд с силой $\vec{F}$, которая направлена вдоль линий напряжённости. Работа этой силы, как легко видеть, будет равна:

$$A = F(x_2 - x_1) = qE(x_2 - x_1).$$

Что изменится, если точки 1 и 2 не лежат на одной линии напряжённости? Оказывается, ничего! Формула для работы поля останется той же самой. Убедимся в этом с помощью рис. 3.

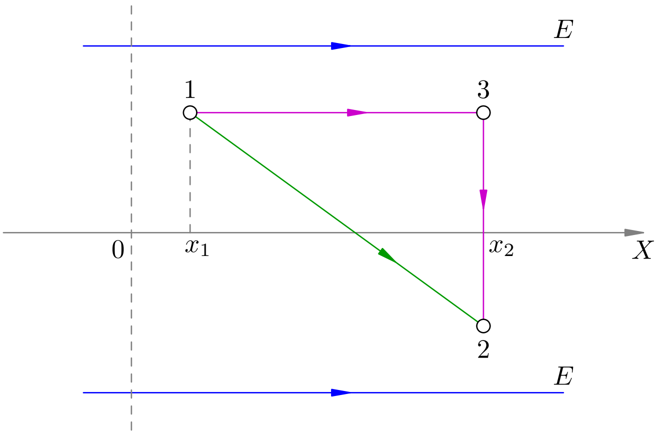

Рис. 3. Перемещение заряда в однородном поле

Двигаясь из точки 1 в точку 2, давайте выберем путь $1 \to 3 \to 2$, где точка 3 лежит на одной силовой линии с точкой 1. Тогда работа A_{32} на участке 32 равна нулю — ведь мы перемещаемся перпендикулярно силе. В результате получим:

$$A = A_{13} + A_{32} = A_{13} = qE(x_2 - x_1).$$

Мы видим, что работа поля зависит лишь от *абсцисс* начального и конечного положений заряда.

Запишем полученную формулу следующим образом:

$$A = qEx_2 - qEx_1 = -((-qEx_2) - (-qEx_1)) = -(W_2 - W_1) = -\Delta W.$$

Здесь $W_1 = -qEx_1$, $W_2 = -qEx_2$. Работа поля, в соответствии с формулой (1), оказывается равна изменению со знаком минус величины

$$W = -qEx. \tag{2}$$

Эта величина и есть *потенциальная энергия заряда в однородном электростатическом поле*. Через x обозначена абсцисса точки, в которой ищется потенциальная энергия. Нулевой уровень потенциальной энергии в данном случае соответствует началу координат $x = 0$ и на рисунках изображён пунктирной линией, перпендикулярной линиям напряжённости[1].

Напомним, что пока считается $q > 0$. Из формулы (2) следует, что при движении заряда вдоль силовой линии потенциальная энергия убывает с ростом x. Это естественно: ведь поле совершает положительную работу, разгоняя заряд, а кинетическая энергия заряда растёт за счёт убыли его потенциальной энергии.

Несложно показать, что формула (2) остаётся справедливой и для $q < 0$. В этом случае потенциальная энергия возрастает с ростом x. Это тоже понятно: ведь сила, с которой поле действует на заряд, теперь будет направлена влево, так что движение заряда вправо будет осуществляться против действия поля. Заряд тормозится полем, кинетическая энергия заряда уменьшается, а потенциальная энергия — увеличивается.

Итак, важный вывод: в формуле для потенциальной энергии через q обозначается *алгебраическая* величина заряда (с учётом знака), а не его модуль.

[1] На самом деле нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать где угодно. Иными словами, потенциальная энергия определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной C, т. е. $W = -qEx + C$. Ничего страшного в такой неопределённости нет: физическим смыслом обладает на потенциальная энергия сама по себе, а разность потенциальных энергий, равная работе поля. В этой разности константа C сократится.

Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов

Пусть два точечных заряда q_1 и q_2 находятся в вакууме на расстоянии r друг от друга. Можно показать, что потенциальная энергия их взаимодействия даётся формулой:

$$W = \frac{kq_1q_2}{r}\,. \tag{3}$$

Мы принимаем формулу (3) без доказательства. Две особенности данной формулы следует обсудить.

Во-первых, где находится нулевой уровень потенциальной энергии? Ведь потенциальная энергия, как видно из формулы (3), в нуль обратиться не может. Но на самом деле нулевой уровень существует, и находится он *на бесконечности*. Иными словами, когда заряды расположены бесконечно далеко друг от друга, потенциальная энергия их взаимодействия полагается равной нулю (что логично — в этом случае заряды уже «не взаимодействуют»).

Во-вторых, q_1 и q_2 — это снова *алгебраические* величины зарядов, т. е. заряды с учётом их знака.

Например, потенциальная энергия взаимодействия двух одноимённых зарядов будет положительной. Почему? Если мы отпустим их, они начнут разгоняться и удаляться друг от друга. Их кинетическая энергия возрастает, стало быть потенциальная энергия — убывает. Но на бесконечности потенциальная энергия обращается в нуль, а раз она убывает к нулю, значит — она является положительной.

А вот потенциальная энергия взаимодействия разноимённых зарядов оказывается отрицательной. Действительно, давайте удалим их на очень большое расстояние друг от друга — так что потенциальная энергия равна нулю — и отпустим. Заряды начнут разгоняться, сближаясь, и потенциальная энергия снова убывает. Но если она была нулём, то куда ей убывать? Только в сторону отрицательных значений.

Формула (3) помогает также вычислить потенциальную энергию системы зарядов, если число зарядов больше двух. Для этого нужно просуммировать энергии каждой пары зарядов. Мы не будем выписывать общую формулу; лучше проиллюстрируем сказанное простым примером, изображённым на рис. 4.

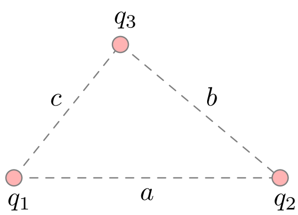

Рис. 4. Взаимодействие трёх зарядов

Если заряды q_1, q_2, q_3 находятся в вершинах треугольника со сторонами a, b, c, то потенциальная энергия их взаимодействия равна:

$$W = \frac{kq_1q_2}{a} + \frac{kq_2q_3}{b} + \frac{kq_1q_3}{c}\,.$$

Потенциал

Из формулы $W = -qEx$ мы видим, что потенциальная энергия заряда q в однородном поле прямо пропорциональна этому заряду.

То же самое мы видим из формулы $W = kq_1q_2/r$: потенциальная энергия заряда q_1, находящегося в поле точечного заряда q_2, прямо пропорциональна величине заряда q_1.

Оказывается, это общий факт: потенциальная энергия W заряда q в любом электростатическом поле прямо пропорциональна величине q:

$$W = q\varphi. \tag{4}$$

Величина φ уже не зависит от заряда, является характеристикой поля и называется *потенциалом*:

$$\varphi = \frac{W}{q}\,. \tag{5}$$

Так, потенциал однородного поля E в точке с абсциссой x равен:

$$\varphi = -Ex. \tag{6}$$

Напомним, что ось X совпадает с линией напряжённости поля. Мы видим, что с ростом x потенциал убывает. Иными словами, *вектор напряжённости поля указывает направление убывания потенциала.*

Для потенциала поля точечного заряда q на расстоянии r от него имеем:

$$\varphi = \frac{kq}{r}\,. \tag{7}$$

Единицей измерения потенциала служит хорошо известный вам *вольт*. Из формулы (5) мы видим, что В = Дж/Кл.

Итак, теперь у нас есть две характеристики поля: силовая (напряжённость) и энергетическая (потенциал). У каждой из них имеются свои преимущества и недостатки. Какую именно характеристику удобнее использовать — зависит от конкретной задачи.

Разность потенциалов

Пусть заряд q перемещается в электростатическом поле из точки 1 в точку 2. Траектория заряда, напомним, роли не играет — работа поля A от этой траектории не зависит и равна разности потенциальных энергий заряда в начальной и конечной точках:

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2.$$

С учётом формулы (4) имеем:

$$A = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{8}$$

Здесь φ_1 — потенциал поля в точке 1, φ_2 — потенциал поля в точке 2. Величина $\varphi_1 - \varphi_2$, от которой зависит работа поля, так и называется: *разность потенциалов*. Обратите внимание, что *разность потенциалов есть потенциал начальной точки минус потенциал конечной точки*, а не наоборот!

Разность потенциалов называется также *напряжением* между точками 1 и 2 и обозначается через U:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{9}$$

Наряду с формулой (8) получаем тогда:

$$A = qU. \tag{10}$$

Записывая формулы (8) и (10) в виде:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}\,, \tag{11}$$

получаем полезное истолкование напряжения: *напряжение (или разность потенциалов) между данными точками — это работа поля по перемещению заряда из начальной точки в конечную, делённая на величину этого заряда.*

Как и потенциальная энергия, потенциал определён с точностью до прибавления произвольной постоянной C: в зависимости от выбора точки, в которой потенциал полагается равным нулю, эта постоянная примет то или иное значение. Но физическим смыслом обладает не потенциал сам по себе, а напряжение (разность потенциалов). При вычитании потенциалов константа C сократится, и напряжение будет уже однозначно определённой величиной, не зависящей от выбора начала отсчёта потенциала.

Выбор точки нулевого потенциала позволяет истолковать в терминах работы сам потенциал. Действительно, пусть 1 — данная точка, 2 — точка нулевого потенциала. Тогда в формуле (11) имеем: $\varphi_1 = \varphi$ (потенциал в данной точке), $\varphi_2 = 0$, $A = A_0$ — работа поля по перемещению заряда q из данной точки в точку с нулевым потенциалом. В результате:

$$\varphi = \frac{A_0}{q}\,. \tag{12}$$

Таким образом, *потенциал поля в данной точке — это работа поля по перемещению заряда из данной точки в точку нулевого потенциала, делённая на величину этого заряда.*

Принцип суперпозиции для потенциалов

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое системой из n заряженных тел. Это поле можно рассматривать как наложение полей, создаваемых каждым телом в отдельности.

Принцип суперпозиции для потенциалов. *Пусть φ — потенциал результирующего поля в данной точке, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — потенциалы полей каждого из тел. Тогда:*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n. \tag{13}$$

Иными словами, потенциал результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из тел в отдельности.

Принцип суперпозиции для потенциалов вытекает из формулы (12) и из того факта, что работа равнодействующей силы есть сумма работ её слагаемых.

Однородное поле: связь напряжения и напряжённости

Предположим, что положительный заряд q перемещается в однородном электростатическом поле по направлению силовой линии из точки 1 в точку 2 (рис. 5). Расстояние между точками равно d.

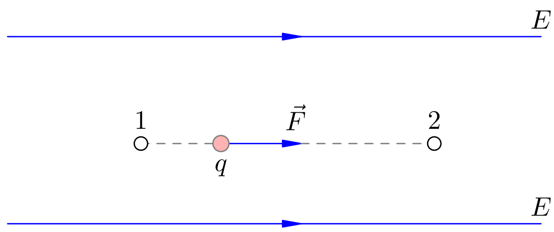

Рис. 5. К выводу формулы $U = Ed$

С одной стороны, работа поля равна произведению силы на путь:

$$A = Fd = qEd.$$

Работа получается положительной, так как сила и перемещение сонаправлены.

С другой стороны, работа поля есть произведение заряда на разность потенциалов между точками 1 и 2:

$$A = qU.$$

(Напряжение также положительно, так как $\varphi_1 > \varphi_2$ — ведь напряжённость направлена в сторону убывания потенциала.) Приравнивая правые части последних двух формул, получим: $qU = qEd$, откуда

$$U = Ed. \tag{14}$$

Эта простая формула позволяет находить напряжение между точками однородного поля E, находящимися на одной силовой линии; при этом напряжённость поля направлена от начальной точки к конечной.

Выразим из формулы (14) напряжённость:

$$E = \frac{U}{d}. \tag{15}$$

Эта формула пригодится нам впоследствии, при нахождении напряжённости поля в конденсаторе. А сейчас обратим внимание на одно следствие данной формулы: *единицей измерения напряжённости является* В/м. Эта единица используется чаще, чем первоначальная Н/Кл. Что ж, немало вещей пришлось узнать, чтобы понять равенство Н/Кл = В/м :-)

Эквипотенциальные поверхности

Как вы помните, введение силовой характеристики поля (напряжённости) дало возможность изображать поле графически — в виде картины линий напряжённости, или силовых линий.

Энергетическая характеристика поля (потенциал) также позволяет дать графическую картину поля — в виде семейства эквипотенциальных поверхностей.

Поверхность в пространстве называется *эквипотенциальной*, если во всех точках этой поверхности потенциал электрического поля принимает одно и то же значение. Коротко говоря, эквипотенциальные поверхности — это поверхности равного потенциала.

Например, из формулы $\varphi = -Ex$ мы видим, что эквипотенциальными поверхностями однородного поля являются всевозможные плоскости $x = \mathrm{const}$. Они перпендикулярны линиям напряжённости (рис. 6).

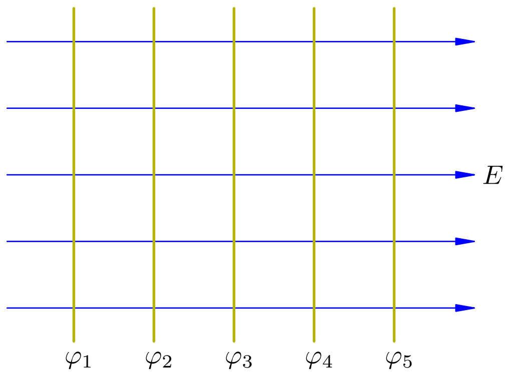

Рис. 6. Эквипотенциальные поверхности однородного поля

Теперь рассмотрим нашу вторую стандартную ситуацию: поле точечного заряда $q > 0$. Потенциал этого поля, как мы уже видели, равен:

$$\varphi = \frac{kq}{r}.$$

Эквипотенциальными поверхностями здесь будут всевозможные сферы $r = \text{const}$. Они также перпендикулярны линиям напряжённости (рис. 7).

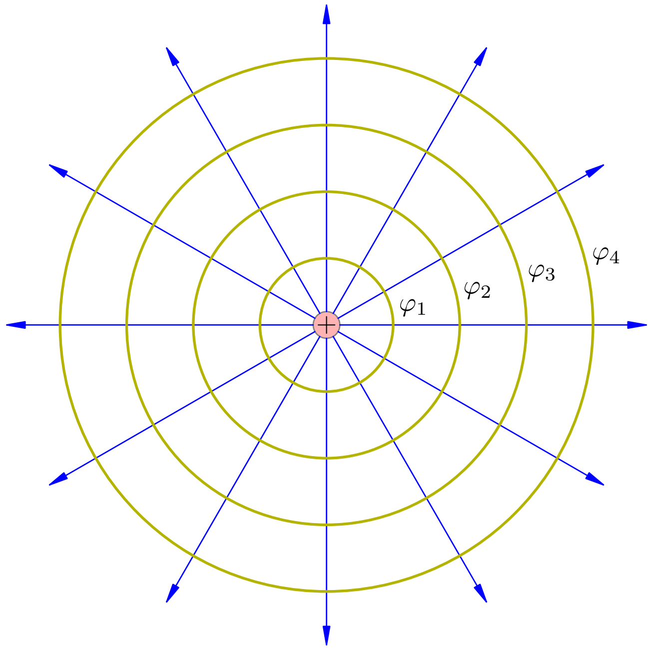

Рис. 7. Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда

Оказывается, *эквипотенциальные поверхности всегда перпендикулярны линиям напряжённости.* Нетрудно понять, почему это так. Предположим, что заряд перемещается по эквипотенциальной поверхности. Работа поля при этом равна нулю: $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\varphi_1 = \varphi_2$. Значит, угол между перемещением заряда и силой, с которой поле действует на заряд, всё время остаётся прямым. Иными словами, заряд перемещается перпендикулярно вектору напряжённости.