

Практическая работа № 22.

Тема: *Вычисление пределов функций, интегрирование и дифференцирование, упрощение выражений и разложение на множители в программе MathCad.*

Цель: Научится находить пределы функций, производные первого и высшего порядка, неопределенные и определенные интегралы функций с помощью математического пакета Mathcad.

Время: 80 мин.

- Задание:**
- 1) Изучить нахождение пределов в математическом пакете Mathcad
 - 2) Найти производные первого и второго порядка функции с помощью математического пакета Mathcad.
 - 3) Изучить нахождение неопределенных интегралов функций с помощью математического пакета Mathcad.
 - 4) Изучить нахождение определенных интегралов функций с помощью математического пакета Mathcad.
 - 5) Научиться упрощать выражения и выполнять разложение на множители.

Литература:

1. Симонович С.В. Информатика. Базовый курс, стр. 502-530
2. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCad 14, - СПб.: Питер, 2006
3. Макаров Е.Г. MathCad: учебный курс, - СПб.: Питер, 2009

Содержание отчёта:

- Ответы на вопросы, поставленные в пунктах описания последовательности выполнения работы.
- Выводы по работе (что изучили, чему научились).
- Распечатка результатов.

Последовательность выполнения работы:

1. Запустите Mathcad. Отобразите необходимые панели инструментов – «Стандартная», «Математика», «Калькулятор», «Вычисления», «Булева алгебра», «График».
2. Вычислить предел:

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3	Вариант № 4	Вариант № 5
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{4x^2}$

- Для вычисления пределов в Mathcad выполните следующие действия:

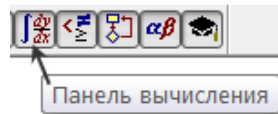
- На математической панели выберите кнопку со знаком интеграла, откроется панель *Calculus* (Исчисление), на которой внизу есть три оператора вычисления пределов. Выберите один из них.
- Введите выражение в поле ввода справа от *lim*.
- В поле ввода под словом *lim* введите имя переменной, по которой надо вычислить предел, и ее предельное значение.
- Выделите уголком или черным цветом все выражение целиком.
- В главном меню Mathcad выберите *Symbolics* ► *Evaluate* ► *Symbolically* (Символьные вычисления ► Вычислить ► Символьно). Mathcad возвращает значение предела, если оно существует.

3. Найдите производную:

Вариант № 1	Вариант № 2	Вариант № 3	Вариант № 4	Вариант № 5
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

$y = 4x^5 - e^x.$	$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$	$y = \cos x + x^4.$	$y = x^4 + \sin x$	$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
-------------------	------------------------------------	---------------------	--------------------	--------------------------------------

- Чтобы вычислить производную в символьном виде, можно использовать оператор



производной Mathcad панели «Вычисления», или наберите [Shift]+[?], чтобы задать оператор производной, и [Ctrl]+[Shift]+[?], чтобы задать оператор производной более высокого порядка. В поле ввода введите выражение, которое требуется дифференцировать, и переменную, по которой дифференцируете. Нажмите [Shift]+[F9] или выберите на панели «Символьные» (Symbolic) оператор «→».

Для нахождения производной первого и высшего порядка так же можно воспользоваться меню Вычисления (Calculus), которое можно вызвать через меню Вид (View) → Панели (Toolbars) → Вычисления (Calculus).

Рассмотрим нахождение производной функции первого и второго порядка на примере:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} \cdot \sin(x) \rightarrow \frac{\sqrt{x} \cdot \cos(x)}{3 \cdot x^2 + 1} + \frac{\sin(x)}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} - \frac{6 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{x} \cdot \sin(x) \rightarrow \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} - \frac{12 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2} - \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(x)}{3 \cdot x^2 + 1} - \frac{12 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2} - \frac{\sin(x)}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} + \frac{72 \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^3}$$

4. Найдите производную функции в заданной точке:

Вариант № 1	$y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$ в точке $x_0 = e$.
Вариант № 2	$y = \lg^3(x^2)$ в точке $x_0 = 10$.
Вариант № 3	$y = \sqrt[4]{3-2x^2} + 3^x \cdot \frac{2}{\ln 3}$ в точке $x_0 = 1$
Вариант № 4	$y = \sqrt[4]{1+\cos x^4}$ в точке $x_0 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$
Вариант № 5	$y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 1$

Пример: _____

В1. Найдите значение производной функции $y = \frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+x}}{x+\sqrt{x+1}}$

в точке $x_0 = \frac{1}{3}$.

$$y(x) := \frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+x}}{x+\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{d}{dx} y(x) \rightarrow \frac{3 \cdot x \cdot (x + \sqrt{x} + 1)}{2 \cdot (x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2} - \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 1\right)}{(x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)} - \frac{x + \sqrt{x} + 1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)} + \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 1\right) \cdot (x + \sqrt{x} + 1)}{(x + \sqrt{x})^2 \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)}$$

$$x_0 := \frac{1}{3}$$

$$\frac{d}{dx} y(x_0) \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right)} - \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right)} - \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\right)}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right)} + \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\right)}{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx} y(x_0) = 2.25$$

- Для ввода переменной с индексом (x_0) после ввода переменной (x) нужно нажать на клавишу



с точкой, потом ввести индекс (0). MathCad будет видеть эту переменную просто как новую переменную, не как элемент массива. (Элементы массива вводятся с помощью кнопки



, которая находится на панели векторов и матриц).

5. Найдите интеграл $\int f(x)dx$ для функции:

Вариант № 1	$f(x) = x^4 + 3x^2 + 5.$
Вариант № 2	$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$
Вариант № 3	$f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 2.$
Вариант № 4	$f(x) = e^x - x^3$
Вариант № 5	$f(x) = 3 - \cos x.$

- В Mathcad есть символьный оператор вычисления неопределенных интегралов, и для того чтобы использовать этот оператор необходимо:
 - Нажмите [Ctrl]+I, чтобы вставить оператор неопределенного интеграла и поля ввода его параметров.
 - Заполните поле ввода для подынтегрального выражения.
 - Поместите переменную интегрирования в поле ввода, следующее за «d», это может быть имя любой переменной.
 - Заключите выражение в выделяющую рамку.
 - Нажмите [Shift] + [F9].
- Команда меню Интегрировать по переменной (Integrate) интегрирует выражение по выделенной переменной. Чтобы проинтегрировать выражение необходимо:
 - Ввести выражение.
 - Выделить переменную.
 - Выбрать пункт Интегрировать по переменной (Integrate) из меню Символика(Symbolics). Mathcad отобразит результат интегрирования.
- Команда Интегрировать по переменной интегрирует выражение по выделенной переменной. Если не выделить переменную, команда меню будет записана серым. Mathcad не может интегрировать, не зная переменной интегрирования.

6. Вычислите:

Вариант № 1	$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx.$
Вариант № 2	$\int_{-2}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{2x+5}} + 3 \right) dx$
Вариант № 3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx.$
Вариант № 4	$\int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2 \right) dx$
Вариант № 5	$\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx.$

- Чтобы вычислить символьно определенный интеграл, надо:
 1. Нажать [Shift]+&, чтобы создать оператор интегрирования с пустыми полями ввода.

2. Заполнить поля ввода для пределов интегрирования. Они могут быть переменными, константами или выражениями.
3. Ввести в поле ввода подынтегральное выражение.
4. Заполнить поле ввода позади «d». Это задаст переменную интегрирования.
5. Окружить всё выражение выделяющей рамкой.
6. Нажать [Shift]+[F9].

Символьный процессор попытается найти неопределенный интеграл от подынтегрального выражения перед подстановкой пределов интегрирования. Если символьный процессор не сможет найти неопределенный интеграл, появится соответствующее сообщение об ошибке. Если подынтегральное выражение или один из пределов содержит десятичную точку, символьный ответ будет числом, отображаемым с двадцатью значащими цифрами.

Этот ответ обычно будет совпадать с ответом, получаемым при численном интегрировании. Однако символьный и численный ответы получены совершенно различными путями. Символьный процессор Mathcad:

1. Находит первообразную.
2. Вычитает значение первообразной от нижнего предела интегрирования из значения первообразной от верхнего предела.

Программа численного интегрирования, с другой стороны:

3. Находит значения подынтегрального выражения во многих точках на отрезке интегрирования.
4. Использует эти значения, чтобы аппроксимировать интеграл.

Точность этой процедуры интегрирования зависит от установленного значения переменной TOL и от гладкости подынтегральной функции.

Рассмотрим нахождение определенного интеграла функции (символьное решение и численное решение) на примере:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = 0.732$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \rightarrow \sqrt{3} - 1$$

7. Упростите выражение

Вариант № 1	$\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$
Вариант № 2	$(a^{\frac{1}{2}} - 4)^2 + 8a^{\frac{1}{2}}$
Вариант № 3	$\frac{4 - y^{\frac{2}{7}}}{2 + y^{\frac{1}{7}}} - 2$
Вариант № 4	$x^{\frac{1}{5}} + \frac{9 - x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} + 3}$
Вариант № 5	$\frac{\sqrt[3]{c^2} - 4}{\sqrt[3]{c} + 2} - c^{\frac{1}{3}}$

- Символьные вычисления в Mathcad можно осуществлять в двух различных вариантах:

- 1) с помощью команд меню;

2) с помощью оператора символьного вывода \rightarrow , ключевых слов символьного процессора и обычных формул (в справочной системе Mathcad этот способ называется символьными вычислениями в реальном времени — *live symbolic evaluation*).

- Для символьных вычислений при помощи команд предназначено главное меню *Symbolics* (Символика), объединяющее математические операции, которые Mathcad умеет выполнять аналитически. Для реализации второго способа применяются все средства Mathcad, пригодные для численных вычислений (например, панели *Calculator*, *Evaluation* и т. д.), и специальная математическая панель инструментов, которую можно вызвать на экран нажатием кнопки *Symbolic Keyword Toolbar* (Панель символика) на панели *Math*. На панели *Symbolic* (Символические) находятся кнопки, соответствующие специфическим командам символьных преобразований. Например, таким, как разложение выражения на множители, расчет преобразования Лапласа и другим операциям, которые в Mathcad нельзя проводить численно и для которых, соответственно, не предусмотрены встроенные функции.
- Пример: упростите выражение

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ expand} \rightarrow a + 25$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ simplify} \rightarrow a + 25$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ factor} \rightarrow a + 25$$

$$x^2 - 6x + 8 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x - 4) \quad (\text{разложение на множители})$$

8. Сохраните файл.
9. Распечатайте документ.
10. Завершите работу MathCad, Windows, выключите компьютер