ПЛАН ЗАНЯТТЯ № 15

ЛЕКЦІЙНО-ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

Тема: **Знаходження розв'язків рівнянь і систем рівнянь.**

Група ОП-21 Дата ________

Мета заняття:

1. **Методична:** удосконалення методики організації та проведення лекційно-практичного заняття.
2. **Дидактична:**
   1) Навчальна:
      а) сформувати поняття:
      - наближений розв’язок;
      - оператор solve;

      б) пояснити:
      - послідовність дій під час розв’язування рівнянь з однією змінною;

      в) формувати навички:
      - використовувати програмні засоби для здобування необхідних навчальних даних;

   2) розвивальна:
      а) формувати вміння чітко й лаконічно висловлювати думки;
      б) розв’язувати в середовищі математичного процесора рівняння з однією змінною та системи рівнянь із двома змінними.
3. **Виховна:**
   1) виховувати в студентів пізнавальний інтерес до дисципліни й обраної спеціальності шляхом використання активних методів і прийомів навчання. Формувати впевненість у своїх силах;
   2) виховувати творчій підхід до роботи, бажання експериментувати, уважність, дисциплінованість під час роботи на ПК;

3) професійна орієнтація й підготовка до подальшої самоосвіти, до майбутньої трудової діяльності.

Вид заняття*: лекційно-практичне.*

Методи та форми проведення заняття:

- фронтальне опитування, тестування;
- пояснення нового матеріалу з застосуванням проектора;
- виконання завдання, самостійна робота під контролем і за допомогою викладача.

Міжпредметні зв'язки:

Забезпечуючи: Основи інформатики, математика.

Забезпечувані: Вища математика, економіка.

Технічні засоби навчання, прикладні програми (додатки):	1) Персональні комп'ютери; 2) Мультимедійний проектор, екран; 3) Математичний процесор MathCad; 4) Програма Netop School;
Методичне забезпечення:	Методична розробка – практична робота № 4, презентації, відеолекції, підручник (електронний) – матеріали сайту викладача: http://msk.edu.ua/ivk , конспект лекцій

Структура заняття

I. Організаційна частина…………………………………………..2–3 хв

II. Актуалізація опорних знань………………….…………………3–7 хв

III. Мотивація навчальної діяльності…………….………………....2–3 хв

IV. Повідомлення теми, мети заняття……………………….………2 хв

V. Викладання нового матеріалу……………………………….….…20–25 хв

1. Розв'язування рівнянь.
2. Приклади розв'язування рівнянь.
3. Приклади розв'язування систем рівнянь.

VI. Інструктаж з техніки безпеки, щодо виконання роботи…………2-5 хв.

VII. Видача завдань для виконання роботи…………………………2-3 хв.

VIII. Виконання студентами завдань практичної роботи …………..….30 хв

IX. Закріплення нового матеріалу……………………………………...5-10 хв

X. Підбиття підсумків заняття………………………………………..3–4 хв

XI. Домашнє завдання……………………………………………………2–3 хв

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. ОРГАНІЗАЦІЙНА ЧАСТИНА

- *відмітка в журналі відсутніх;*
- *перевірка готовності до заняття студентів, аудиторії, обладнання, перевірка домашнього завдання;*

II. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальне опитування:

1. Опис середовища Mathcad.
2. Уведення математичних виразів та тексту в Mathcad.
3. Форматування математичних виразів та тексту в Mathcad.
4. Побудова графіків у Mathcad.

III. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Прийом «Мозкова атака».

Цей прийом полягає в колективній творчій роботі з розв’язування певної проблеми. Усіх учнів об’єднує спільна робота над пошуком істини.

Запитання:

1. Чи можна розв’язати рівняння за допомогою комп’ютера?
2. Як найточніше перевірити розв’язання рівняння?
3. Чи можна розв’язати рівняння, не знаючи способу розв’язання?

IV. ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ, МЕТИ ЗАНЯТТЯ

Тема: Знаходження розв'язків рівнянь і систем рівнянь.

Мета: Закріпити знання по застосуванню Mathcad для виконання розрахунків, розв'язання рівнянь.

V. ВИКЛАД НОВОГО МАТЕРІАЛУ

З Mathcad'ом можна розв'язувати широкий спектр задач — від найпростіших до дуже складних — чисельно або символьно. Як уже було досліджено, можна також візуалізувати функції та дані за допомогою дво- та тривимірних графіків.

На сьогоднішньому занятті будемо вивчати, як за допомогою математичного процесора розв'язати рівняння чи навіть їх системи.

1. Розв'язування рівнянь

Розглянемо одне алгебраїчне рівняння з одним невідомим x:

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

наприклад,

$$\sin(x) = 0.$$

Для розв'язування таких рівнянь Mathcad має вбудовану функцію root, що, залежно від типу задачі, може містити або два, або чотири аргументи й, відповідно, працює трохи по-різному.

root(f(x),x);

root(f(x),x,a,b);

f(x) — скалярна функція, що визначає рівняння (1);

x — скалярна змінна, щодо якої розв'язується рівняння;

a, b — межі інтервалу, всередині якого відбувається пошук кореня.

Перший тип функції root вимагає додаткового задавання початкового значення (guess value) змінної x. Для цього потрібно попередньо привласнити x деяке число. Пошук кореня здійснюватиметься поблизу цього числа. Таким чином, присвоювання початкового значення вимагає апріорної інформації про зразкову локалізацію кореня.

Наведемо приклад розв'язування найпростішого тригонометричного рівняння sin(x)=0, корені якого відомі заздалегідь.

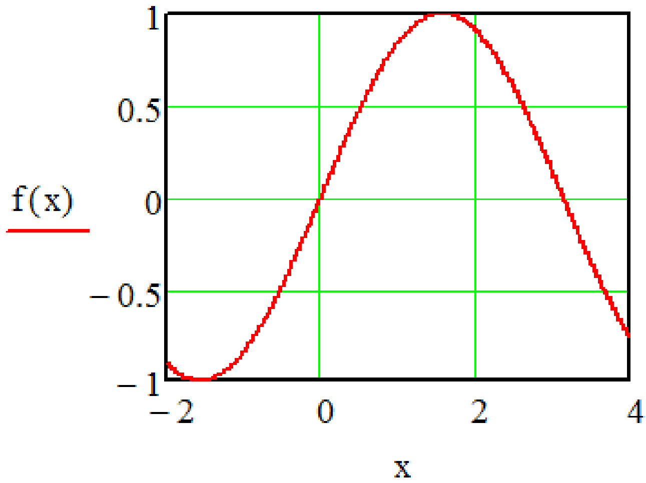
Пошук кореня нелінійного алгебраїчного рівняння:

$x := 0.5$

$f(x) := \sin(x)$

$solution := root(f(x), x)$

$solution = 3.343 \times 10^{-13}$



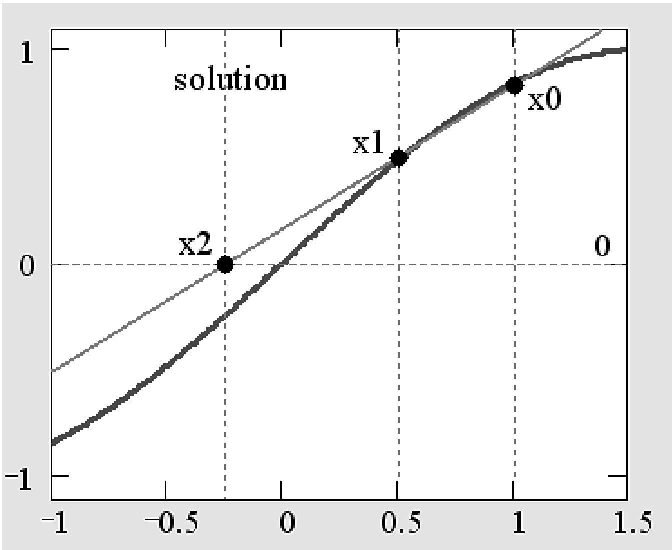
2. Графічне розв'язання рівняння sin(x)=0

Графік функції f(x) = sin(x) і положення знайденого кореня зображені на рисунку. Зверніть увагу, що, хоча рівняння має нескінченну кількість коренів x_n=np_i, (n=0,±1, ±2,...), Mathcad знаходить (із заданою точністю) тільки один із них, x0, що лежить найближче до x=0,5. Якщо задати інше початкове значення, наприклад x=3, то розв'язкою буде інший корінь рівняння — x_1=p_i тощо.

Дуже важливою характеристикою рішення є його точність. У MathCAD можна регулювати величину похибки рішення, змінюючи значення спеціальної системної змінної TOL (від англійського tolerance - точність). Строго кажучи, TOL - це параметр, що визначає умову припинення ітерацій. Тобто цикл чисельного алгоритму зупинить свою роботу і видасть останнє значення x, якщо f (x) прийме значення, менше, ніж TOL. Змінити величину цієї вбудованої змінної можна або за допомогою команди Math / Options / Built-in variables / TOL (Математичні / Опції / Системні змінні / TOL), або виконавши відповідне присвоювання безпосередньо ліворуч або зверху функції чисельного рішення.

Таким чином, для пошуку кореня засобами Mathcad потрібна його попередня локалізація. Це пов'язано з особливостями вибраного числового методу, що називається методом січних:

- початкове наближення прийняти за нульові наближення до кореня: $x_0=x$;
- вибрати крок h=TOLx і визначити перше наближення до кореня $x_1=x_0+h$. Якщо x=0, то приймається h=TOL;
- через ці дві точки провести січну — пряму лінію, що перетинає вісь x у деякій точці x_2. Ця точка приймається за друге наближення;
- нову січну провести через першу й другу точку, тим самим визначаючи третє наближення тощо;
- якщо на якому-небудь кроці виявляється, що рівняння виконане, тобто $|f(x)| < TOL$, то ітераційний процес переривається і x видається як розв'язок.



Ілюстрація методу січних

Результат, зображений на рисунку, отриманий для похибки обчислень, якій з метою ілюстративності попередньо привласнили значення TOL = 0,5. Тому для пошуку кореня з такою невисокою точністю виявилося досить однієї ітерації. В обчисленнях похибка TOL = 0,001 була встановлена за умовчанням, і розв'язок, виданий числовим методом, знаходився набагато ближче до істинного положення кореня x=0. Іншими словами, чим менша константа TOL, тим ближчим до нуля буде значення f(x) у знайденому корені, але тим більше часу буде витрачено обчислювальним процесором Mathcad на його пошук.

Приклади розв'язування рівнянь

1. Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0$.

Розв'язання

Обчислювальний блок має вигляд:

$$(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0\ solve, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Слід зауважити, що отримане значення x=–2 — це сторонній корінь.

Відповідь. –1, 2.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 5x + 6} = 0.$$

Розв'язання

Обчислювальний блок:

$$\frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 5x + 6} = 0\ solve, x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)$$

Слід зауважити, що значення x=2, яке перетворює на нуль і чисельник, і знаменник лівої частини, відкинуто.

Відповідь. −1/4.

Приклади розв'язування систем рівнянь

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20. \end{cases}$$

Розв'язання

Під час розв'язування систем мітки заповнюються інструментом Insert Matrix.

Обчислювальний блок:

$$\begin{bmatrix} x+y+\dfrac{x}{y}=9 \\ \dfrac{(x+y)\cdot x}{y}=20 \end{bmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{10}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доповнення рівняння його ОДЗ дозволяє виключити сторонні корені.

Обчислювальний блок для розв'язування рівняння $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$, розглянутого вище, в цьому випадку набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} (x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}=0 \\ x\ge -1 \end{bmatrix} \text{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

і сторонніх коренів не має.

Оператор solve можна застосувати і для розв'язування нерівностей.

Це корисно в разі знаходження області визначення функції.

Наприклад, знайдіть область визначення функції

$$y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$$

Розв'язання

Обчислювальний блок:

$$5-x-\frac{6}{x}\ge 0\,\text{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x<0 \\ 2\le x\cdot x\le 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь. $x\in(-\infty;0)\cup[2;3]$.

VI. ІНСТРУКТАЖ З ТЕХНІКИ БЕЗПЕКИ, ЩОДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

VII. ВИДАЧА ЗАВДАНЬ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Завдання: Розв'язати задані рівняння й системи рівнянь, побудувавши при необхідності графіки шуканих функцій.

Послідовність виконання роботи:

1. Запустите Mathcad. Відобразите необхідні панелі інструментів – «Стандартна», «Математика», «Калькулятор», «Обчислення», «Булева алгебра», «Графік».

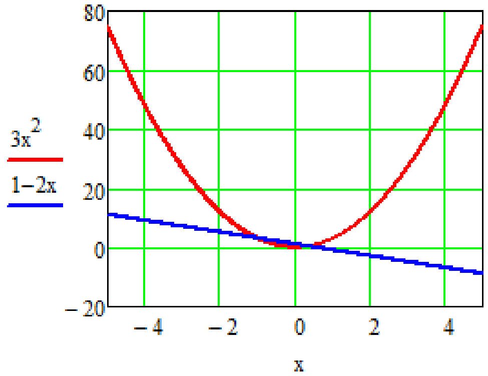
2. Розв'яжіть рівняння з одним невідомим графічним способом, за допомогою функції ***root*** і за допомогою блоку ***Given... Find ( )***:

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3	Варіант № 4	Варіант № 5
$x^2 - 3x + 2 = 0$	$2x + 1 = \frac{4 - x}{x + 1}$	$\cos(x) = x^2 - 1$	$\frac{2x + 1}{3 - x} = x^2$	$x^3 - 3x^2 + 5 = 0$

– *Розглянемо приклад:*

$2 \cdot x + 3 \cdot x^2 = 1$ *або* $3x^2 = 1 - 2x$

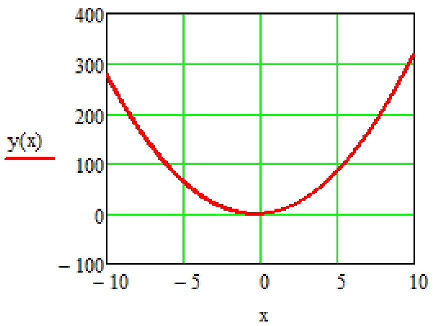
Для початку побудуємо графіки функцій ***y=3x²*** *і* ***y=1-2x:***

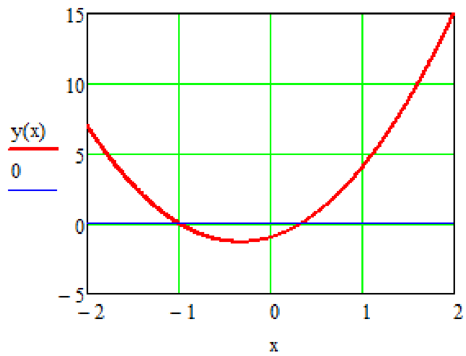


Видне, що рівняння має 2 кореня (2 крапки перетинання). Виділимо змінну x і виконаємо команду Символіка → Змінна → Розв'язати*. Одержимо:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.333 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тепер запишемо рівняння у вигляді функції: / і побудуємо її графік:





Відформатуємо графік так, щоб явно були видні крапки перетинання функції y(x) з віссю x (лінія y=0).

Задаймо для x початкове значення й застосуємо функцію root:

$x := -2$

$\text{root}(y(x), x) = -1$ *(після останньої дужки натискаємо «=»)*

Змінимо початкове значення, так щоб воно було ближче до другого кореня, і знову застосуємо функцію root:

$x := 0$

$\mathrm{root}(y(x), x) = 0.333$

Аналогічно для блоку Given... Find ( ):

$x := 1$

Given

$2 \cdot x + 3 \cdot x^2 = 1$

$\mathrm{Find}(x) = 0.33333333$

$x := -3$

Given

$2 \cdot x + 3 \cdot x^2 = 1$

$\mathrm{Find}(x) = -1$

Тільки після команди Given повинне бути записане рівняння (не функція), а початкове значення змінної задається до цієї команди. Подвійне клацання мишею на результаті викликає діалогове вікно, що дозволяє задати необхідну точність для результату обчислень.

Пример № 2

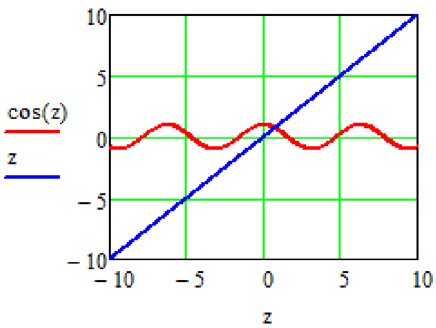
$\cos(z) = z$

0.7390851332151606416

$f(z) := \cos(z) - z$

$z := 0$

$\mathrm{root}(f(z), z) = 0.739$



3. Розв'яжіть рівняння:

   а) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$ (достатній рівень)

   б) $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = \frac{9}{2} - \frac{\arcsin\frac{x}{3}}{\pi}$ (високий рівень)

4. Розв’яжіть систему рівнянь:

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3	Варіант № 4	Варіант № 5

$\begin{cases} 2x+3y^3=1 \\ -x^2+2\sqrt{y}=2 \end{cases}$	$\begin{cases} y-x^2-x=0 \\ 3x-x^2-y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} \pi\cdot x+y=1 \\ 2x-\pi\cdot y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ y-x=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x^3-y^3=37 \\ x-y=1 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ x+2y-z=4 \\ 3x+y-3z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y-2z=-10 \\ -x+3y-z=-1 \\ 3x-y+5z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-y-5z=1 \\ x+y-2z=6 \\ 3x-2y-6z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y+2z=5 \\ 5x-6y-4z=-3 \\ -4x+5y+3z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+3y+z=7 \\ 4x-2y-3z=3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

5. Збережіть файл, роздрукуйте документ.
6. Завершіть роботу Mathcad, Windows, виключите комп'ютер.

VIII. ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ СТУДЕНТАМИ.

IX. ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Прийом «Дерево розв'язків»

Студенти об'єднуються у три або чотири групи з однаковою кількістю учасників. Кожна група обговорює запитання й робить записи на своєму «дереві» (аркуш ватману). Потім групи міняються місцями і дописують на деревах сусідів свої ідеї.

Запитання:

1. Які недоліки має розв'язування рівнянь за допомогою математичного процесора порівняно з традиційними способами?
2. Наскільки точний розв'язок рівняння у середовищі Mathcad?
3. Які можливі неточності виникають під час розв'язування рівнянь чи їх систем?
4. Які переваги має розв'язування за допомогою математичного процесора над традиційними способами?

X. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ ЗАНЯТТЯ

Викладач оцінює роботу студентів на занятті, робить зауваження щодо роботи групи та засвоєнню лекційного матеріалу.

XI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Опрацювати конспект лекції та відповідний розділ підручника.
2. У середовищі Mathcad розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 17x - 180 = 0;$
2) $x^2 - 10x + 16 = 0.$

3. Розв’язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 5x = 1, \\ y^2 - 13x = 23; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 8, \\ x^2 - 3y = -5. \end{cases}$