

Практична робота № 12.

Тема: **Обчислення меж функцій, інтегрування й диференціювання, спрощення виразів і розкладання на множники в програмі Mathcad.**

Ціль: Навчитися знаходити межі функцій, похідні першого й вищого порядку, невизначені й визначені інтеграли функцій за допомогою математичного пакета Mathcad.

Час: 40 хв.

За-

вдання:

- 1) Вивчити знаходження меж у математичному пакеті Mathcad
- 2) Знайти похідні першого й другого порядку функції за допомогою математичного пакета Mathcad.
- 3) Вивчити знаходження невизначених інтегралів функцій за допомогою математичного пакета Mathcad.
- 4) Вивчити знаходження визначених інтегралів функцій за допомогою математичного пакета Mathcad.
- 5) Навчитися спрощувати вирази й виконувати розкладання на множники.

Література:

1. Симонович С.В. Інформатика. Базовий курс, стор. 502-530
2. Гурський Д.А., Турбіна Е.С. Обчислення в Mathcad 14, - Спб.: Пітер, 2006
3. Макарова Е.Г. Mathcad: навчальний курс, - Спб.: Пітер, 2009

Зміст звіту:

- Відповіді на запитання, поставлені в пунктах опису послідовності виконання роботи.
- Висновки по роботі (що вивчили, чому навчилися).
- Роздруківка результатів.

Послідовність виконання роботи:

- Запустіть Mathcad. Відобразіть необхідні панелі інструментів – «Стандар-тна», «Математика», «Калькулятор», «Обчислення», «Булева алгебра», «Графік».
- Обчислити межу:

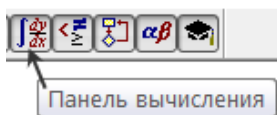
Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3	Варіант № 4	Варіант № 5
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{4x^2}$

- Для обчислення меж в Mathcad виконайте наступні дії:

- На математичній панелі виберіть кнопку зі знаком інтеграла, відкриється панель **Calculus** (Обчислення), на якій знизує три оператори обчислення меж. Виберіть один з них.
- Уведіть вираз в поле вводу праворуч від **lim**.
- У поле вводу під словом **lim** уведіть ім'я змінної, по якій треба обчислити межу, і її граничне значення.
- Виділіть куточком або чорним кольором усе вираження цілком.
- У головному меню Mathcad виберіть **Symbolics** ► **Evaluate** ► **Symbolically** (Символьні обчислення ► Обчислити ► Символьно). Mathcad повертає значення межі, якщо воно існує.

- Знайдіть похідну:

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3	Варіант № 4	Варіант № 5
$y = 4x^5 - e^x$	$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$	$y = \cos x + x^4$	$y = x^4 + \sin x$	$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$



- Щоб обчислити похідну в символьному виді, можна використовувати оператор похідної Mathcad $\frac{d}{dx}$ панелі «Вычисления», або наберіть [Shift]+[?], щоб задати оператор похідної, і [Ctrl]+[Shift]+[?], щоб задати оператор похідної більш високого порядку. У поле введення введіть

вираження, яке потрібно диференціювати, і змінну, по якій диференціюєте. Натисніть [Shift]+[F9] або виберіть на панелі «Символьні» (Symbolic) оператор «→».

Для знаходження похідній першого й вищого порядку так само можна скористатися меню Обчислення (Calculus), яке можна викликати через меню Вид (View) → Панелі (Toolbars) → Обчислення (Calculus).

Розглянемо знаходження похідної функції першого й другого порядку на прикладі:

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(x)}{3x^2 + 1} \rightarrow \frac{\sqrt{x} \cdot \cos(x)}{3 \cdot x^2 + 1} + \frac{\sin(x)}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} - \frac{6 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(x)}{3x^2 + 1} \rightarrow \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} - \frac{12 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \cos(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2} - \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(x)}{3 \cdot x^2 + 1} - \frac{12 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^2} - \frac{\sin(x)}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot x^2 + 1)} + \frac{72 \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \sin(x)}{(3 \cdot x^2 + 1)^3}$$

4. Знайдіть похідну функції в заданій точці:

Варіант № 1	$y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$ в точці $x_0 = e$.
Варіант № 2	$y = \lg^3(x^2)$ в точці $x_0 = 10$.
Варіант № 3	$y = \sqrt[4]{3 - 2x^2} + 3^x \cdot \frac{2}{\ln 3}$ в точці $x_0 = 1$
Варіант № 4	$y = \sqrt[4]{1 + \cos x^4}$ в точці $x_0 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$.
Варіант № 5	$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x}$ в точці $x_0 = 1$


Приклад:

В1. Найдите значение производной функции $y = \frac{\frac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+x}}{x + \sqrt{x+1}}}$ в точке $x_0 = \frac{1}{3}$.

$$y(x) := \frac{\frac{\sqrt{x}}{1 - x\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+x}}{x + \sqrt{x+1}}}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \frac{3 \cdot x \cdot (x + \sqrt{x} + 1)}{2 \cdot (x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)^2} - \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)}{(x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)} - \frac{x + \sqrt{x} + 1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x}) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)} + \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) \cdot (x + \sqrt{x} + 1)}{(x + \sqrt{x})^2 \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)}$$

$$\frac{d}{dx_0}y(x_0) = 2.25$$

- Для введення змінної з індексом (x_0) після введення змінної (x) потрібно натиснути на клавішу із крапкою , потім увести індекс (0). Mathcad буде бачити цю змінну просто як нову змінну, не як елемент масиву. (Елементи масиву вводяться за допомогою кнопки /, яка перебуває на панелі векторів і матриць).

5. Знайдіть інтеграл $\int f(x)dx$ для функції:

Варіант № 1	$f(x) = x^4 + 3x^2 + 5.$
Варіант № 2	$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$
Варіант № 3	$f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 2.$
Варіант № 4	$f(x) = e^x - x^3.$
Варіант № 5	$f(x) = 3 - \cos x.$

- В Mathcad є символний оператор обчислення невизначених інтегралів, і для того щоб використовувати цей оператор необхідно:
 - Натисніть [Ctrl]+I, щоб вставити оператор невизначеного інтеграла й поля вводу його параметрів.
 - Заповніть поле введення для підінтегрального виразу.
 - Помістіть змінну інтегрування в поле введення, що впливає за «d», це може бути ім'я будь-якої змінної.
 - Укладіть вираз в рамку, що виділяє.
 - Натисніть [Shift] + [F9].
- Команда меню Інтегрувати по змінній (Integrate) інтегрує вираження по виділеній змінній. Щоб проінтегрувати вираження необхідно:
 - Увести вираження.
 - Виділити змінну.
 - Вибрати пункт Інтегрувати по змінній (Integrate) з меню Символіка(Symbolics). Mathcad відобразить результат інтегрування.

- Команда Інтегрувати по змінній інтегрує вираження по виділеній змінній. Якщо не виділити змінну, команда меню буде записана сірим. Mathcad не може інтегрувати, не знаючи змінної інтегрування.

6. Обчислите:

Варіант № 1	$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx.$
Варіант № 2	$\int_{-2}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{2x+5}} + 3 \right) dx$
Варіант № 3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx.$
Варіант № 4	$\int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - 2 \right) dx$
Варіант № 5	$\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{8} - \sin \frac{x}{8} \right)^2 dx.$

- Щоб обчислити символно певний інтеграл, треба:

1. Нажати [**Shift**]+**&**, щоб створити оператор інтегрування з порожніми полями введення.
2. Заповнити поля введення для меж інтегрування. Вони можуть бути змінними, константами або виразами.
3. Увести в поле введення підінтегральний вираз.
4. Заповнити поле введення за «d». Це задасть змінну інтегрування.
5. Оточити все вираження рамкою, що виділяє.
6. Нажати [**Shift**]+**[F9]**.

Символьний процесор спробує знайти невизначений інтеграл від підінтегрального виразу перед підстановкою меж інтегрування. Якщо символний процесор не зможе знайти невизначений інтеграл, з'явиться відповідне повідомлення про помилку. Якщо підінтегральне вираження або один з меж містить десяткову крапку, символну відповідь буде числом, відображуваним із двадцятьма значущими цифрами.

Ця відповідь звичайно буде збігатися з відповіддю, одержувану при чисельному інтегруванні. Однак символний і чисельний відповіді отримані зовсім різними шляхами. Символьний процесор Mathcad:

1. Знаходить первісну.
2. Віднімає значення первісної від нижньої межі інтегрування зі значення первісної від верхньої межі.

Програма чисельного інтегрування, з іншого боку:

3. Знаходить значення підінтегрального виразу в багатьох крапках на відрізьку інтегрування.
4. Використовує ці значення, щоб апроксимувати інтеграл.

Точність цієї процедури інтегрування залежить від устанавленого значення змінної TOL і від гладкості підінтегральної функції.

Розглянемо знаходження певного інтеграла функції (символьний розв'язок і чисельний розв'язок) на прикладі:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = 0.732$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \rightarrow \sqrt{3} - 1$$

7. Спростіть вирази

Варіант № 1	$\frac{a^{\frac{2}{3}} - 16}{a^{\frac{1}{3}} - 4} - a^{\frac{1}{3}}$
Варіант № 2	$(a^{\frac{1}{2}} - 4)^2 + 8a^{\frac{1}{2}}$
Варіант № 3	$\frac{4 - y^{\frac{2}{7}}}{2 + y^{\frac{1}{7}}} - 2$
Варіант № 4	$x^{\frac{1}{5}} + \frac{9 - x^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{5}} + 3}$
Варіант № 5	$\frac{\sqrt[3]{c^2} - 4}{\sqrt[3]{c} + 2} - c^{\frac{1}{3}}$

– Символьні обчислення в *Mathcad* можна здійснювати у двох різних варіантах:

- 1) за допомогою команд меню;
- 2) за допомогою оператора символного висновку \rightarrow , ключових слів символного процесора й звичайних формул (у довідковій системі

Mathcad цей спосіб називається символічними обчисленнями в реальному часі — *live symbolic evaluation*).

- Для символічних обчислень за допомогою команд призначене головне меню *Symbolics* (Символіка), що поєднує математичні операції, які *Mathcad* уміє виконувати аналітично. Для реалізації другого способу застосовуються всі засоби *Mathcad*, придатні для чисельних обчислень (наприклад, панелі *Calculator*, *Evaluation* і т.д.), і спеціальна математична панель інструментів, яку можна викликати на екран натисканням кнопки *Symbolic Keyword Toolbar* (Панель символіки) на панелі *Math*. На панелі *Symbolic* (Символічні) перебувають кнопки, відповідні до специфічних команд символічних перетворень. Наприклад, таким, як розкладання виразів на множники, розрахунки перетворення Лапласа й іншим операціям, які в *Mathcad* не можна проводити чисельно й для яких, відповідно, не передбачені вбудовані функції.

Приклад. Спростите вираз:

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ expand} \rightarrow a + 25$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ simplify} \rightarrow a + 25$$

$$10a^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{a} - 5)^2 \text{ factor} \rightarrow a + 25$$

$$x^2 - 6x + 8 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x - 4)$$

(розкладання на множники)

8. Збережіть файл.
9. Роздрукуйте документ.
10. Завершіть роботу *Mathcad*, *Windows*, вимкніть комп'ютер.