Змістовий модуль 4. Однофазні електричні кола змінного струму.
Тема № 4.2. Кола змінного струму з індуктивністю та ємністю.
Активна та реактивна потужність.

План лекції.

1. Ланцюг змінного струму з індуктивністю.
2. Ланцюг змінного струму з ємністю.
3. Послідовний ланцюг змінного струму. Резонанс напруг.
4. Потужність змінного струму. Коефіцієнт потужності.

1. Ланцюг змінного струму з індуктивністю

Розглянемо ланцюг (мал. 1), у якому до котушки індуктивності L, що не має активного опору ($R = 0$), прикладена синусоїдальна напруга й по якій тече синусоїдальний струм

$$I(t) = I_m \sin \omega t\,. \tag{1}$$

Змінний струм, що протікає через котушку, створює в ній ЕРС самоіндукції e_L. Тоді у відповідності із другим правилом Кірхгофа можна записати:

$$u + e_L = 0\,. \tag{2}$$

Згідно із законом Фарадея ЭДС самоіндукції

$$e_L = -L\frac{di}{dt} \tag{3}$$

З (1), (2) і (3) одержимо:

$$u = -e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = I_m \omega L \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{4}$$

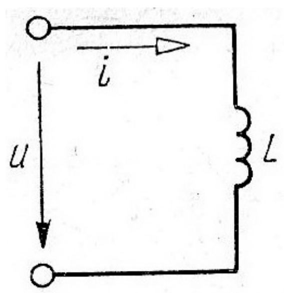
де

$$U_m = I_m \omega L\,. \tag{5}$$

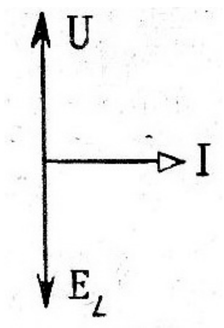
Ділячи обидві частини рівності (5) на $\sqrt{2}$, одержимо для діючих значень $U = I\omega L$, звідки

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{X_L} \tag{6}$$

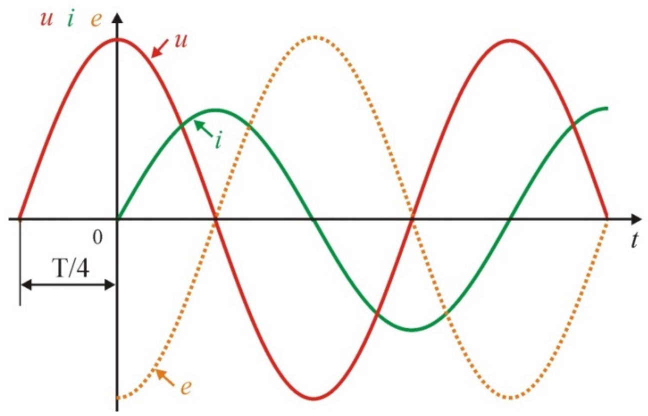
З формули (6) ми бачимо, що в розглянутому ланцюзі струм відстає по фазі від напруги на кут $\frac{\pi}{2}$. Фізично це пояснюється тим, що індуктивна котушка реалізує інерцію електромагнітних процесів. Векторна діаграма для цього ланцюга зображена на мал. 2, а часові – на мал. 3.



Мал. 1. Ланцюг змінного струму з індуктивністю



Мал. 2. Векторна діаграма ланцюга змінного струму з індуктивністю



Мал. 3. Часові діаграми напруги, струму й ЕРС для ланцюга з індуктивністю

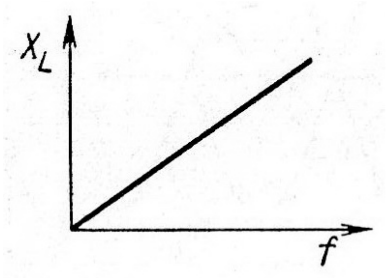
Співвідношення (6) являє собою закон Ома для ланцюга з ідеальною індуктивністю, а величина $X_L = \omega L = 2\pi fL$ називається ***індуктивним опором***. Індуктивний опір вимірюється в омах. Зі збільшенням частоти струму f індуктивний опір X_L збільшується (мал. 4). Фізично це пояснюється тим, що зростає швидкість зміни струму, а отже, і ЕРС самоіндукції.

Миттєва потужність у ланцюзі із чисто індуктивним опором рівна:

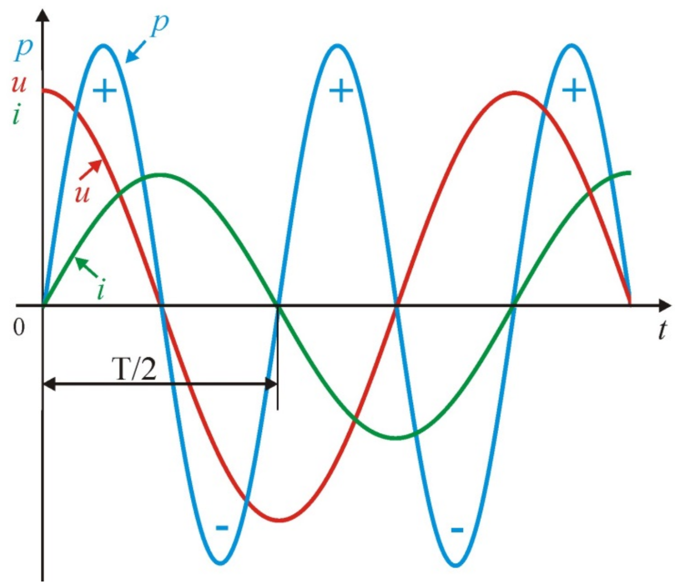
$$p = iu = I_m U_m \sin\omega t \cos\omega t = UI \sin 2\omega t \tag{7}$$

Ми бачимо (мал. 5), що вона змінюється за законом синуса з подвоєною частотою.

Позитивні значення потужності відповідають накопиченню енергії котушкою, а негативні – поверненню запасеної енергії назад джерелу. Середня за період потужність дорівнює нулю. Отже, ланцюг з індуктивністю потужності не споживає, у ній відбувається лише перекачування електричної енергії від джерела в котушку й назад. Опір такого ланцюга називають ***реактивним***.



Мал. 4. Залежність індуктивного опору від частоти



Мал. 5. Часові діаграми напруги, струму й миттєвої потужності для кола з індуктивністю

Реальні ланцюги, що містять індуктивність, завжди мають і активний опір: опір проведення обмотки проводів. Тому розглянемо електричне коло (мал. 6), у якім через котушку індуктивності L, що володіє активним опором R, протікає змінний струм.

Через котушку й резистор протікає той самий струм, тому в якості основного виберемо вектор струму й будемо будувати вектор напруги, прикладеного до цього ланцюга.

Напруга, прикладене до ланцюга, дорівнює векторній сумі падінь напруг на котушці індуктивності й резисторі:

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L \qquad (8)$$

Напруга на резисторі, як було показано вище, буде збігатися по фазі зі струмом, а напруга на індуктивності буде випереджати струм на кут $\frac{\pi}{2}$.

Побудувавши вектори $\vec{I}$, $\vec{U}_R$ і $\vec{U}_L$, і скориставшись формулою (8), знайдемо вектор $\vec{U}$. Векторна діаграма показана на мал. 7.

Ми бачимо, що в розглянутому ланцюзі струм $\vec{I}$ відстає по фазі від прикладеного напруги $\vec{U}$, але не на $\dfrac{\pi}{2}$, як у випадку чистої індуктивності, а на деякий кут φ. Цей кут може приймати значення від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ й при заданій індуктивності залежить від значення активного опору: зі збільшенням R кут φ зменшується.

По теоремі Піфагора

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \tag{9}$$

Т.к. $U_R = IR$, а $U_L = IX_L$, то $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2X_L^2} = I\sqrt{R^2 + X_L^2}$, звідки

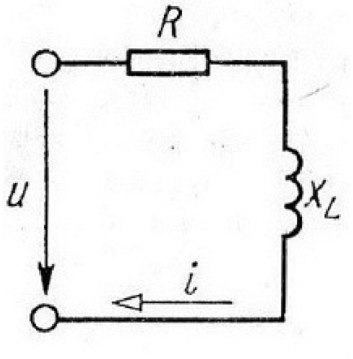
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \tag{10}$$

Уведемо позначення $\sqrt{R^2 + X_L^2} = Z$, де Z - ***повний опір*** ланцюги.

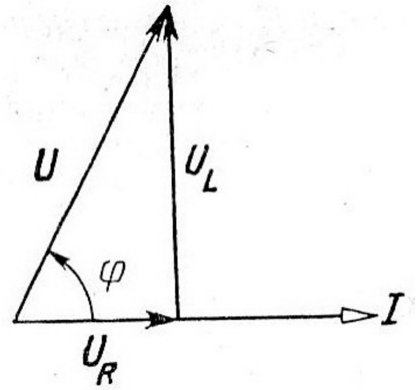
Тоді вираз закону Ома прийме вигляд

$$I = \frac{U}{Z} \tag{11}$$

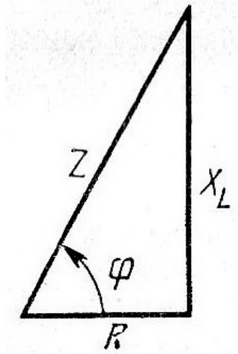
Тому що повний опір ланцюга Z визначається по теоремі Піфагора, йому відповідає трикутник опорів (мал. 8).



Мал. 6. Схема ланцюга змінного струму з R і L



Мал. 7. Векторна діаграма для ланцюга з R і L



Мал. 8. Трикутник опорів для ланцюга з R і L

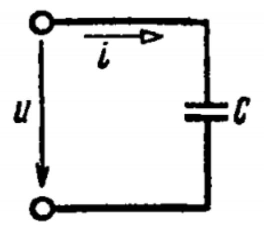
Із трикутника опорів визначається зрушення фаз між струмом і напругою:

$$tg\varphi = \frac{X_L}{R} \tag{12}$$

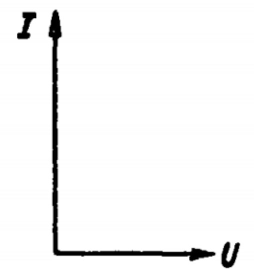
$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \tag{13}$$

2. Ланцюг змінного струму з ємністю

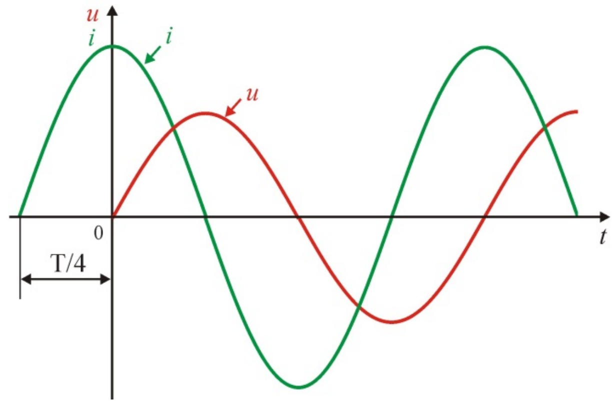
Розглянемо електричне коло, у якім змінна напруга $U(t) = U_m \sin\omega t$ прикладена до ємності C (мал. 9).



Мал. 9. Схема ланцюга змінного струму з ємністю



Мал. 10. Векторна діаграма напруги й струму з ємністю



Мал. 11. Часові діаграми напруги й струму для ланцюга з ємністю

Миттєве значення струму в ланцюзі з ємністю дорівнює швидкості зміни заряду на обкладинках конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{14}$$

але оскільки $q = Cu$, то

$$i = \frac{d(Cu)}{dt} = C\frac{du}{dt} = C\frac{d(U_m \sin\omega t)}{dt} = U_m\omega C\cos\omega t = U_m\omega C\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

,

де

$$U_m \omega C = I_m . \tag{15}$$

Ми бачимо, що в цьому ланцюзі струм випереджає напругу на кут $\frac{\pi}{2}$. Поділ зарядів на обкладинках і, як наслідок, появу напруги на ємності можна зрівняти із процесом збільшення рівня рідини при заповненні баку.

Для діючих значень $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ вираз (15) запишеться як

$$U \omega C = I , \tag{16}$$

звідки одержимо вираз для струму:

$$I = \frac{U}{1/\omega C} = \frac{U}{X_C} \tag{17}$$

Це закон Ома для ланцюга змінного струму з ємністю, а величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \tag{18}$$

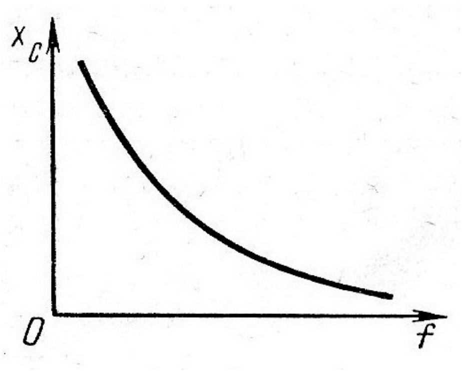
називається ***ємнісним опором***. Векторна діаграма для цього ланцюга показана на мал. 10, а часові - на мал. 11.

З формули (18) і мал. 12 випливає, що ємнісний опір X_C зменшується з ростом частоти f. Це пояснюється тим, що при більшій частоті заряд і розряд конденсатора відбуваються швидше, тобто в одиницю часу через конденсатор проходить більша кількість електрики, що рівносильне зменшенню опору.

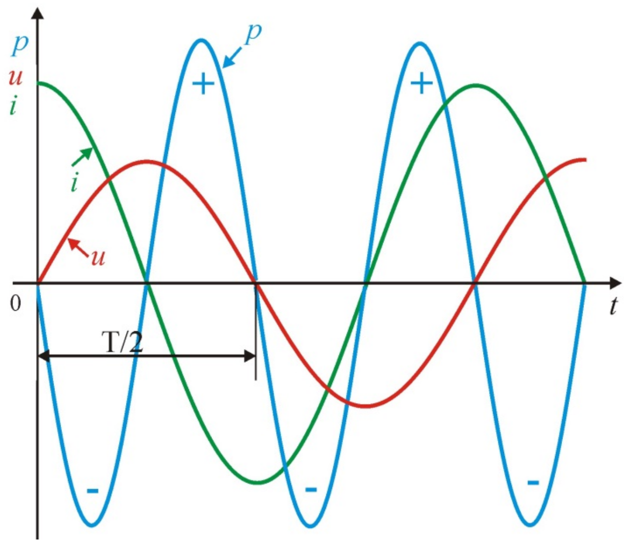
Миттєва потужність у ланцюгу, що містить ємність:

$$p = iu = I_m \sin \omega t \cdot U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -U_m \mathrm{I}_m \sin \omega t \cos \omega t = -UI \sin 2\omega t \tag{19}$$

Ми бачимо (мал. 13), що миттєва потужність змінюється з подвоєною частотою. При цьому позитивні значення потужності відповідають заряду конденсатора, а негативні - його розряду й поверненню запасеної енергії в джерело. Середня за період потужність тут дорівнює нулю, оскільки в ланцюзі з конденсатором активна потужність не споживається, а відбувається обмін електричною енергією між конденсатором і джерелом. Отже, конденсатор, так само як і індуктивність, є ***реактивним опором***.



Мал. 12. Залежність ємнісного опору від частоти



Мал. 13. Часові діаграми напруги, струму й миттєвої потужності для ланцюга з ємністю

3. Послідовний ланцюг змінного струму з R, C, L. Резонанс напруг

Розглянемо тепер ланцюг змінного струму, що містить індуктивність, ємність і резистор, включені послідовно (мал. 14).

Через усі елементи ланцюга протікає той самий струм, тому в якості основного виберемо вектор струму й будемо будувати вектор напруги, прикладеного до цього ланцюга. Напруга, прикладене до ланцюга, дорівнює векторній сумі падінь напруг на котушці індуктивності, на ємності й на резисторі:

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C . \tag{20}$$

Оскільки нам відомі амплітуди й фази цих векторів, ми можемо побудувати векторну діаграму й знайти вектор $\vec{U}$ (мал. 15).

Із цієї векторної діаграми ми можемо знайти модуль вектора прикладеного до ланцюга напруги $\vec{U}$ й зрушення по фазі φ між струмом і напругою:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = IZ \tag{21}$$

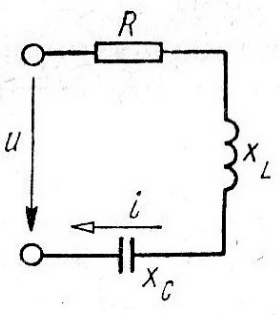
де величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad (22)$$

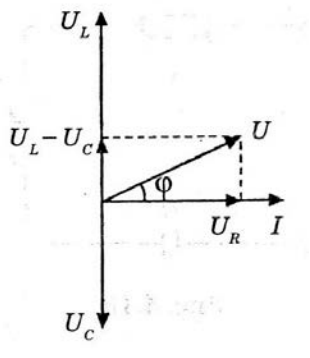
називається ***повним опором ланцюга***. З векторної діаграми видно, що зрушення по фазі між струмом і напругою визначається рівнянням

$$tg\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{X}{R} \qquad (23)$$

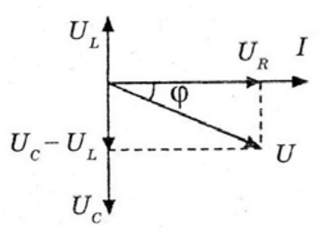
У результаті побудови діаграми ми одержали трикутник напруг, гіпотенуза якого дорівнює прикладеній напрузі $\vec{U}$. При цьому різниця фаз між струмом і напругою визначається співвідношенням векторів $\vec{U}_L$ і $\vec{U}_C$. При $\vec{U}_L$ > $\vec{U}_C$ (див. мал. 15) кут φ позитивний і навантаження має індуктивний характер, при $\vec{U}_L$ < $\vec{U}_C$ кут φ негативний і навантаження має ємнісний характер (мал. 16), а при $\vec{U}_L$ = $\vec{U}_C$ кут φ дорівнює нулю й навантаження є чисто активним (мал. 17).



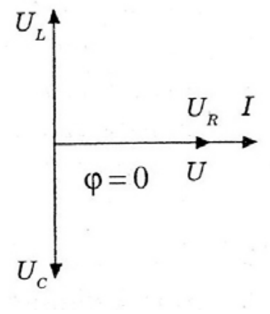
Мал. 14. Схема ланцюга змінного струму з R, L і C



Мал. 15. Векторна діаграма для ланцюга з R, L і C $(\vec{U}_L > \vec{U}_C)$

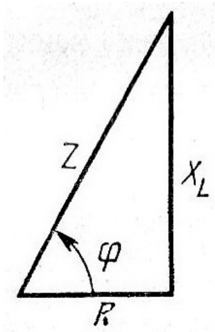


Мал. 16. Векторна діаграма для ланцюга з R, L і C $(\vec{U}_L < \vec{U}_C)$

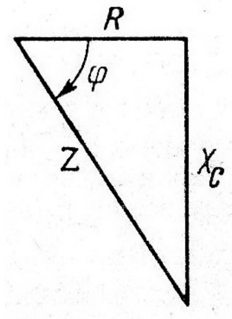


Мал. 17. Векторна діаграма для ланцюга з R, L і C $(\vec{U}_L = \vec{U}_C)$

Трикутнику напруг відповідає трикутник опорів. Наприклад, для кола з активним і індуктивним опорами ($X_L > X_C$ або $X_C = 0$, мал. 18) і кола з активним і ємнісним опором ($X_C > X_L$ або $X_L = 0$, мал. 19).



Мал. 18. Трикутник опорів для кола з R та L



Мал. 19. Трикутник опорів для кола з R та C

Резонансом напруг називають явище в ланцюзі з послідовним контуром, коли струм у ланцюзі збігається по фазі з напругою джерела.

Знайдемо умову резонансу напруг. Для того щоб струм ланцюга збігався по фазі з напругою, реактивний опір повинний бути дорівнює нулю, тому що $tg\varphi = \dfrac{X}{R}$.

Таким чином, умовою резонансу напруг є $X = 0$ або $X_L = X_C$. Але $X_L = 2\pi fL$, а $X_C = \dfrac{1}{2\pi fC}$, де f - частота джерела живлення. У результаті можна записати

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно f, одержимо

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (24)$$

При резонансі напруг частота джерела дорівнює власній частоті коливань контуру.

Вираження (24) є формулою Томсона, що визначає залежність власної частоти коливань контуру f_0 від параметрів L і C.

4. Потужність змінного струму. Коефіцієнт потужності.

Інтенсивність процесів одержання, передачі, перетворення й споживання електричної енергії визначає потужність. Залежно від характеру процесів, що відбуваються в ланцюгах змінного струму, розрізняють активну, реактивну та повну потужність.

Активна потужність P характеризує величину споживаним ланцюгом енергії, що не вертається джерелу живлення, тобто енергії, що переходить безповоротно з електричної в інші види – наприклад, теплоту або механічну роботу.

Реактивна потужність визначає інтенсивність обміну електричною енергією між джерелом і реактивним навантаженням.

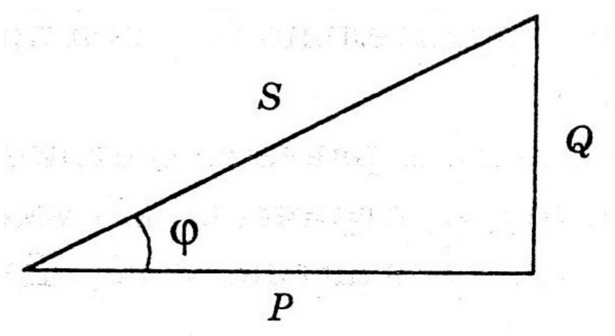
Повна потужність визначає вимоги, пропоновані до джерела живлення, його габарити й вартість. Джерело повинно бути розраховане на споживані ланцюгом струм і напругу, незалежно від величини активної потужності. Ця величина вказується на табличках приладів змінного струму.

Повна потужність і її складові зв'язані між собою співвідношенням

$$S^2 = P^2 + Q^2 \tag{25}$$

і можуть бути представлені трикутником потужностей, який подібний до трикутників напруг і опорів (мал. 20).

Активна (корисна) потужність P залежить від струму, напруги й $\cos\varphi$. При збільшенні кута φ зменшуються $\cos\varphi$ й потужність P, а при зменшенні кута φ активна потужність P зростає. Таким чином, $\cos\varphi$ показує, яка частина повної потужності теоретично може бути перетворена в інші види енергії. Величина $\cos\varphi$ називається ***коефіцієнтом потужності.***



Мал. 20. Трикутник потужностей

Таблиця 1. Потужності змінного струму

Активна потужність	Реактивна потужність	Повна потужність
$P = UI\cos\varphi$ одиниця виміру: Вт	$S = UI\sin\varphi$ одиниця виміру: вар («вольт·ампер реактивний»)	$S = UI$ одиниця виміру: $B \cdot A$

Для більш раціонального використання потужності змінного струму, вироблюваного джерелами електричної енергії, потрібно намагатися зробити навантаження таким, щоб $\cos\varphi$ ланцюгу був близький до одиниці. На практиці в масштабах підприємства добитися цього досить важко, і гарним показником є $\cos\varphi$, рівний 0,9-0,95.

Питання для самоконтролю

1. Який опір називається активним, а який реактивним?
2. Від чого залежить ємнісний опір?
3. Від чого залежить індуктивний опір?
4. Що зображується на трикутнику напруг, трикутнику опорів, трикутнику потужностей?
5. У якому ланцюзі спостерігається резонанс напруг? Запишіть умову резонансу.
6. Дайте визначення повної, активної й реактивної потужностей.
7. Що таке коефіцієнт потужності? Яке його техніко-економічне значення?

Список літератури

1. Данилов И.А., Иванов П.М. Общая электротехника с основами электроники: Учеб. пособие для неэлектротехн. спец. техникумов. – М.: Высш. шк., 2005. – §§ 5.3 – 5.9, 5.12 (с. 134 – 154, 162 - 164).

2. Синдеев Ю.Г. Электротехника с основами электроники: учеб. пособие. – 15-е изд., стереотипное – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – §§4.5 - 4.9, 4.11 (с. 101 – 115, 119 - 120).

3. Славинский А.К., Туревский И.С. Электротехника с основами электроники: учебное пособие. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009. – §§ 4.5 – 4.7 (с. 90 – 106).