

План лекції

3. Момент сили

4. Момент імпульсу і закон його збереження

3. Момент сили.

Рівняння динаміки обертового руху твердого тіла

Для характеристики обертального ефекту сили при дії її на тверде тіло вводять поняття моменту сили. Розрізняють моменти сили щодо нерухомої точки й щодо нерухомої осі.

Моментом сили щодо нерухомої точки O називається фізична величина \vec{M} , обумовлена векторним добутком радіус-вектору \vec{r} , проведеного із точки O в точку A прикладення сили, на силу \vec{F} (мал. 1.10):

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \quad (1.30)$$

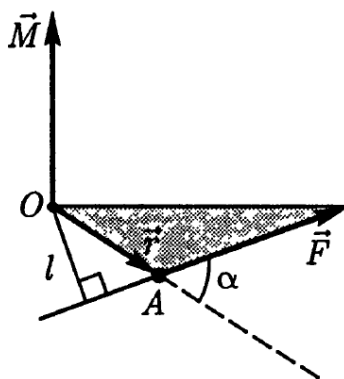


Рис. 1.10

Модуль моменту сили

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (1.31)$$

де α - кут між \vec{r} і \vec{F} ; $r \sin \alpha = l$ - найкоротша відстань між лінією дії сили й точкою O - плече сили.

Напрямок вектору \vec{M} збігається з напрямком поступального руху правого гвинта при його обертанні від \vec{r} до \vec{F} .

Моментом сили щодо нерухомої осі z називається скалярна величина M_z , рівна проекції на цю вісь вектору \vec{M} моменту сили, визначеного щодо довільної точки O даної осі z (мал. 1.11). Значення моменту M_z не залежить від вибору положення точки O на осі z .

Якщо вісь z збігається з напрямком вектору \vec{M} , то момент сили представляється у вигляді вектору, що збігається з віссю:

$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z. \quad (1.32)$$

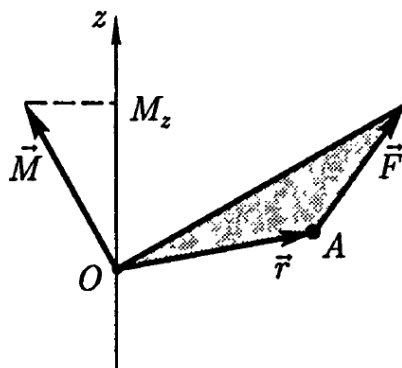


Рис. 1.11

Знайдемо вираз для роботи при обертанні тіла (мал. 1.12).

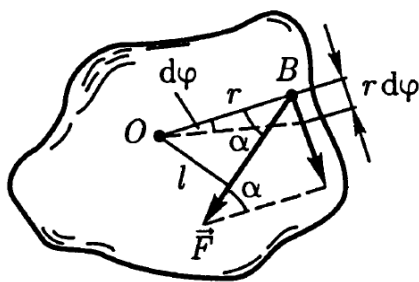


Рис. 1.12

Нехай сила \vec{F} прикладена в точці B , що перебуває на осі z на відстані r , α - кут між напрямком сили й радіус-вектором \vec{r} . Через те, що тіло абсолютне тверде, робота цієї сили дорівнює роботі, витраченій на поворот усього тіла. При повороті тіла на нескінченно малий кут $d\varphi$ точка прикладення B проходить шлях $ds = r d\varphi$ і робота дорівнює добутку проекції сили на напрямок зсуву на величину зсуву:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi = M_z d\varphi, \quad (1.33)$$

де $F r \sin \alpha = F l = M_z$ - момент сили щодо осі z . Таким чином, робота при обертанні тіла дорівнює добутку моменту діючої сили на кут повороту.

Робота при обертанні тіла йде на збільшення його кінетичної енергії:

$$dA = dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega, \text{ тому } M_z d\varphi = J_z \omega d\omega, \text{ або } M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

З урахуванням того, що $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, одержимо $M_z = J_z \frac{d\omega}{dt}$ й остаточно

$$M_z = J_z \varepsilon \quad (1.34)$$

Це рівняння являє собою рівняння динаміки обертового руху твердого тіла щодо нерухомої осі.

У векторній формі воно запишеться так:

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}. \quad (1.35)$$

4. Момент імпульсу й закон його збереження

Моментом імпульсу (кількості руху) матеріальної точки A щодо нерухомої точки O називається фізична величина, обумовлена векторним добутком:

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}], \quad (1.36)$$

де \vec{r} - радіус-вектор, проведений із точки O в точку A ;
 $\vec{p} = m\vec{v}$ - імпульс матеріальної точки (мал. 1.13).

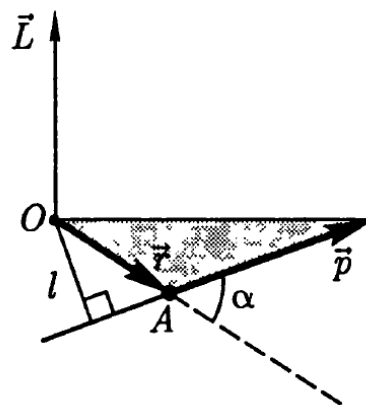


Рис. 1.13

Модуль вектору моменту імпульсу

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl, \quad (1.37)$$

де α - кут між векторами \vec{r} й \vec{p} ;
 l - плече вектору \vec{p} щодо точки O .

Моментом імпульсу щодо нерухомої осі z називається скалярна величина L_z , рівна проекції на цю вісь вектору моменту імпульсу, визначеного

щодо довільної точки O даної осі. Момент імпульсу L_z не залежить від положення точки O на осі z .

При обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі z кожна окрема точка тіла рухається по окружності постійного радіуса r_i з деякою швидкістю v_i . Швидкість \vec{v}_i і імпульс $m_i \vec{v}_i$ перпендикулярні цьому радіусу, тобто радіус є плечем вектору $m_i \vec{v}_i$. Тому можемо записати, що момент імпульсу окремої частки

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad (1.38)$$

і спрямований по осі убік, обумовлений правилом правого гвинта.

Момент імпульсу твердого тіла щодо осі є сума моментів імпульсу окремих часток:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i (\omega r_i) r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega \quad (1.39)$$

Таким чином, момент імпульсу твердого тіла щодо осі дорівнює добутку моменту інерції тіла щодо тієї ж осі на кутову швидкість.

Продиференціюємо рівняння за часом:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z, \quad (1.40)$$

т. ч.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (1.41)$$

Цей вираз – ще одна форма рівняння (закону) динаміки обертового руху твердого тіла щодо нерухомої осі: похідна моменту імпульсу твердого тіла щодо осі дорівнює моменту сил щодо тієї ж осі.

Можна показати, що має місце векторна рівність

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.42)$$

У замкненій системі момент зовнішніх сил $\vec{M} = 0$ і $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, звідки $\vec{L} = \text{const}$.

Цей вираз являє собою закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкненої системи зберігається, тобто не змінюється із часом.

Закон збереження моменту імпульсу - фундаментальний закон природи.

Продемонструвати закон збереження моменту імпульсу можна за допомогою лави Жуковського. Нехай людина, що тримає у витягнутих руках гантелі, сидить на лаві, яка без тертя обертається навколо вертикальної осі (мал. 1.14), з кутовою швидкістю ω_1 . Якщо людина пригорне гантелі до себе, то момент інерції системи поменшає. Оскільки момент зовнішніх сил дорівнює нулю, момент імпульсу системи зберігається й кутова швидкість обертання зростає $\omega_2 > \omega_1$.

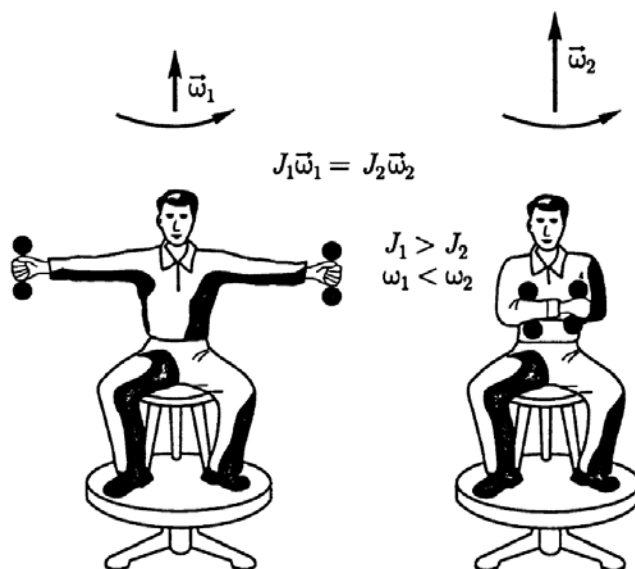


Рис. 1.14

Зіставимо основні величини й рівняння, що визначають обертання тіла навколо нерухомої осі і його поступальний рух (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	\vec{F}	Момент силы	M_z или \vec{M}
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a};$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon;$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z\omega^2}{2}$

Питання для самоконтролю

1. Що називають моментом сили відносно нерухомої точки? Відносно нерухомої осі? Як визначається напрямок моменту сили?
2. Виведіть і сформулюйте рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.
3. Що таке момент імпульсу матеріальної точки? Твердого тіла? Як визначається напрямок вектору моменту імпульсу?
4. У чім полягає фізична сутність закону збереження моменту імпульсу? У яких системах він виконується? Наведіть приклади.

Список літератури

1. Трофимова Т.И. Физика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Т.И.Трофимова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с. (§§ 22-23).
2. Трофимова Т.И. Курс физики. Учеб. пособие для вузов / Т.И.Трофимова. – Изд. 9-е, перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 560 с. (§§ 18-19).