

Змістовий модуль № 3. Змінний струм. Електромагнітні коливання  
Тема 3.2 «Електромагнітні коливання»  
Лекція № 9

План лекції

1. Коливальний контур
2. Рівняння коливального контуру
3. Вільні незатухаючі коливання в контурі
4. Вільні загасаючі коливання в контурі
5. Змушені коливання в контурі. Резонанс

1. Коливальний контур

Електромагнітні коливання являють собою фізичні явища, що супроводжуються періодичними змінами електричних величин (заряди, струми) і взаємними перетвореннями електричного й магнітного полів.

Для збудження й підтримки електромагнітних коливань використовується коливальний контур – замкнене електричне коло, що складається з котушки індуктивністю  $L$ , конденсатора ємністю  $C$  і резистора опором  $R$  (мал. 3.4).

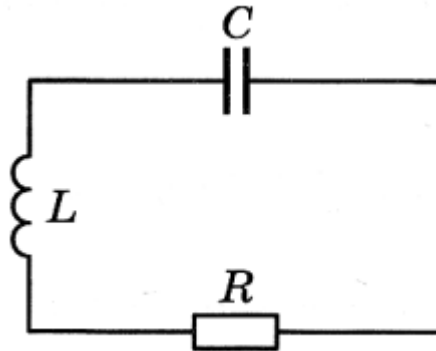


Рис. 3.4. Коливальний контур

Розглянемо ідеалізований коливальний контур, у яким  $R \approx 0$ .

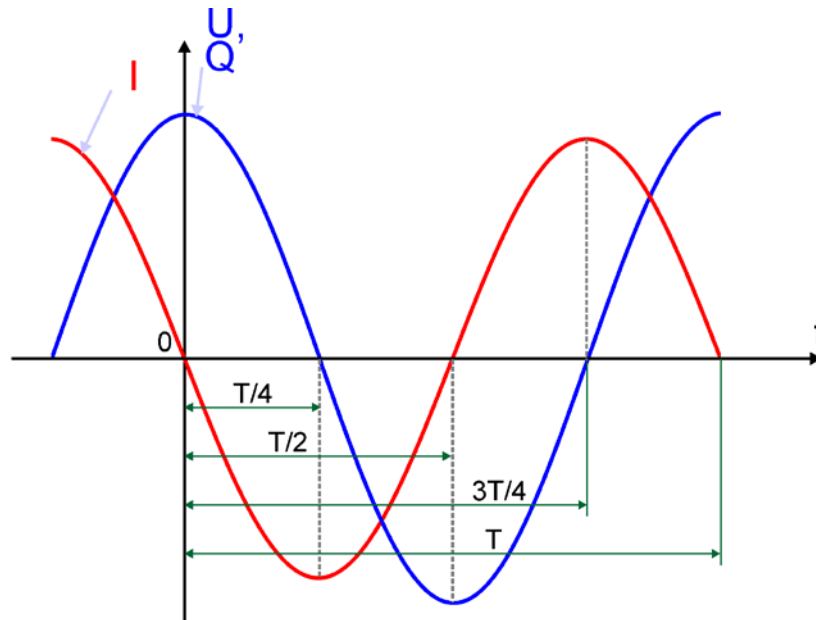
Для збудження в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, передаючи його обкладинкам заряди  $\pm Q$ . Тоді в початковий момент часу  $t = 0$  між обкладинками конденсатора виникає електричне поле, енергія якого  $\frac{Q^2}{2C}$ .

Якщо замкнути конденсатор на котушку індуктивності, то він почне розряджатися, і в контурі потече зростаючий в часі струм  $I$ . У результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки (вона рівна  $\frac{LI^2}{2}$ ) зростати.

Якщо  $R \approx 0$ , згідно із законом збереження енергії, повна енергія

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const, \quad (3.10)$$

оскільки вона на нагрівання не витрачається. Тому в момент часу  $t = \frac{T}{4}$ , коли конденсатор повністю розрядиться, енергія електричного поля стане рівною нулю, а енергія магнітного поля (отже, і струм) досягне найбільшого значення.



Мал. 3.5

Починаючи із цього моменту і до моменту  $t = \frac{T}{2}$  струм у контурі буде убувати; у результаті почне слабшати магнітне поле котушки, і в ній буде індукватися струм, який тече, згідно із правилом Ленца, у тому ж напрямку, що й струм розрядки конденсатора.

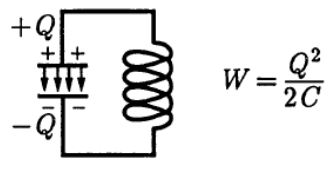
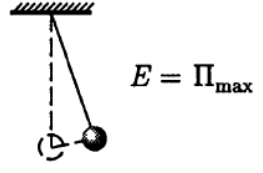
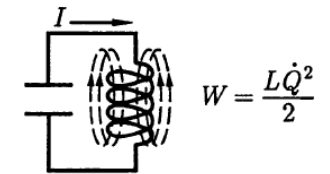
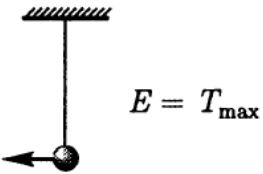
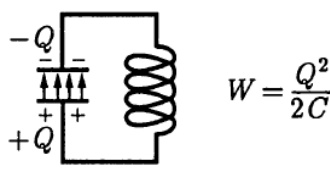
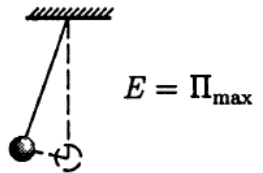
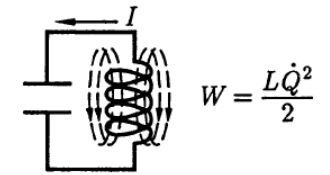
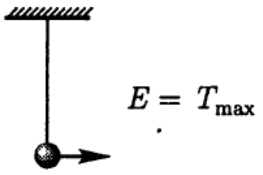
Конденсатор почне перезаряджатися, виникне електричне поле, що прагне послабити струм, який зрештою звернеться в нуль, а заряд на обкладинках конденсатора досягне максимуму ( $t = \frac{T}{2}$ ). Далі ті ж процеси почнуть протікати у зворотному напрямку, і система до моменту часу  $t = T$  прийде в первісний стан. Після цього весь розглянутий цикл повториться спочатку.

Якби втрат енергії не було, то в контурі відбувалися б періодичні незатухаючі коливання, тобто періодично змінювалися (коливалися) би заряд  $Q$  на обкладинках конденсатора, напруга  $U$  на конденсаторі й сила струму  $I$ , що тече через котушку індуктивності. Отже, у контурі виникають електромагнітні коливання, причому коливання супроводжуються перетвореннями енергій електричного й магнітного полів.

Електричні коливання в коливальному контурі можна зіставити з механічними коливаннями маятника (див. табл. 3.1) взаємними перетвореннями, що супроводжуються, потенційної й кінетичної енергій

маятника. У цьому випадку енергія електричного поля конденсатора ( $\frac{Q^2}{2C}$ ) аналогічна потенційній енергії маятника, енергія магнітного поля котушки ( $\frac{LI^2}{2}$ ) - його кінетичної енергії, сила струму в контурі - швидкості руху маятника. Індуктивність  $L$  відіграє роль маси  $m$ , а опір контуру - сили тертя, що діє на маятник.

Таблиця 3.1

| Час $t$            | Стадії коливального процесу   |            | Аналогія між електромагнітними й механічними коливаннями  |  |
|--------------------|-------------------------------|------------|---|--|
|                    | у конденсаторі                | у котушці  |   |  |
| $t = 0$            | $Q = \max$                    | $I = 0$    |  $W = \frac{Q^2}{2C}$         |  $E = \Pi_{\max}$   |
| $t = \frac{T}{4}$  | $Q = 0$                       | $I = \max$ |  $W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$  |  $E = T_{\max}$    |
| $t = \frac{T}{2}$  | $Q = \max$                    | $I = 0$    |  $W = \frac{Q^2}{2C}$       |  $E = \Pi_{\max}$ |
| $t = \frac{3T}{4}$ | $Q = 0$                       | $I = \max$ |  $W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$ |  $E = T_{\max}$   |
| $t = T$            | Повторення розглянутого циклу |            |   |  |

## 2. Рівняння коливального контуру

Розглянемо коливальний контур, який крім  $R$ ,  $L$  і  $C$  містить зовнішню змінну ЕРС  $E$ . За позитивний напрямок обходу виберемо, наприклад, напрямок за годинниковою стрілкою (мал. 3.6). Струм вважається позитивним, якщо тече по контуру в позитивному напрямку, і негативним - якщо ні.

Позначимо через  $Q$  заряд тієї з обкладинок конденсатора, напрямком якої до іншої обкладики збігається з позитивним напрямком обходу (див. мал. 3.6).

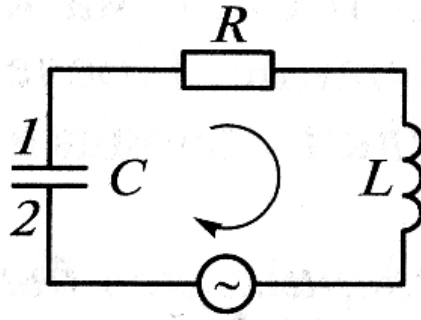


Рис. 3.6. Коливальний контур із втратами й джерелом ЕДС

Закон Ома для ділянки ланцюга 1RL2:

$$IR = \varphi_2 - \varphi_1 + E_s + E \quad (3.11)$$

де ЕРС самоіндукції  $E_s = -L \frac{dI}{dt}$  (котушка вважається такою, що не деформується, й не має феромагнітного сердечника), а різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{C}$ . Тоді рівняння (1) прийме вид:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = E \quad (3.12)$$

Враховуючи, що  $I = \frac{dQ}{dt} = Q'$  й  $\frac{dI}{dt} = Q''$ , одержимо рівняння коливального контуру:

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E. \quad (3.13)$$

Рівняння коливального контуру (3) може бути презентовано у вигляді

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = \frac{E}{L}, \quad (3.14)$$

або

$$Q'' + 2\delta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{E}{L} \quad (3.15)$$

де  $\delta = \frac{R}{2L}$  - коефіцієнт загасання,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{власна частота коливального контуру.}$$

При  $E = 0$  (у контурі відсутня зовнішня ЕРС) електричні коливання є вільними, при  $R = 0$  - незатухаючими, при  $R \neq 0$  - загасаючими.

### 3. Вільні незатухаючі коливання в контурі

Розглянемо коливальний контур, у якому активний опір  $R = 0$  і відсутня зовнішня ЕРС ( $E = 0$ ). У цьому випадку (см. (3.15)) рівняння вільних незатухаючих коливань

$$Q'' + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad (3.16)$$

або

$$Q'' + \omega_0^2 Q = 0 \quad (3.17)$$

Розв'язок рівняння

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.18)$$

де  $Q_m$  - амплітуда коливань заряду конденсатора;  
 $\varphi$  - початкова фаза коливань заряду на конденсаторі.

Значення  $Q_m$  й  $\varphi$  визначаються початковими умовами, а  $\omega_0$  - параметрами коливального контуру.

Період вільних незатухаючих електричних коливань визначається формулою Томсона.

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{\omega_0 / 2\pi} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.19)$$

Сила струму в коливальному контурі й напруга в конденсаторі

$$I = Q' = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (3.20)$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.21)$$

де  $I_m = \omega_0 Q_m$ ,  $U_m = \frac{Q_m}{C}$  - відповідно амплітуди сили струму й напруги.

З виразів (3.18) і (3.20) випливає, що коливання струму  $I$  випереджають по фазі коливання заряду  $Q$  на  $\frac{\pi}{2}$ , тобто при досягненні струмом максимального значення заряд (а також і напруга) звертається в нуль, і навпаки (мал. 3.5).

#### 4. Вільні загасаючі коливання в контурі

Розглянемо реальний коливальний контур ( $R \neq 0$ ), але в якому відсутня зовнішня ЕРС ( $E = 0$ ). У цьому випадку рівняння вільних загасаючих коливань (згідно (3.15))

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad (3.22)$$

або

$$Q'' + 2\delta Q' + \omega_0^2 Q = 0, \quad (3.23)$$

де  $\delta = \frac{R}{2L}$  - коефіцієнт загасання,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  - власна частота коливального контуру.

Коливання заряду у випадку малих загасань ( $\delta \ll \omega_0^2$ ) відбуваються за законом

$$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.24)$$

з частотою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (3.25)$$

Частота  $\omega$  менше власної частоти  $\omega_0$  коливального контуру. При  $R = 0$  формула (3.25) переходить в ( $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ).

Коливання  $Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$  не гармонійне. Залежність (3.24) представлена на мал. 3.7 суцільною кривою, а амплітуда загасаючих коливань  $Q_m e^{-\delta t}$  - штриховими лініями.

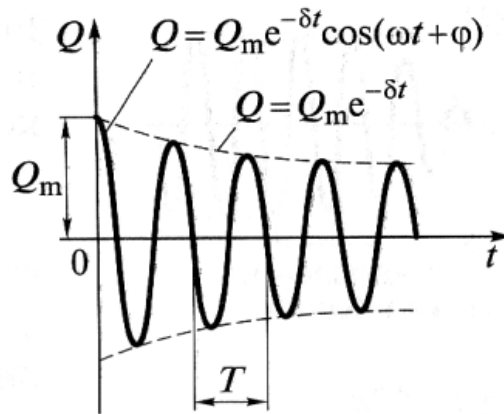


Рис. 3.7. Вільні загасаючі коливання

Величину  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ , що показує, скільки коливань зробить система за час релаксації (поки амплітуда зменшиться в  $e$  разів), називають добротністю контуру.

При  $\delta^2 \geq \omega_0^2$  замість коливань буде відбуватися аперіодичний розряд конденсатора. Активний опір контуру, названий критичним, при якому настає аперіодичний процес; визначається з умови

$$\frac{R_{KP}^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}, \quad (3.26)$$

звідки

$$R_{KP} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.27)$$

## 5. Змушені коливання в контурі. Резонанс

Змушені електромагнітні коливання - незатухаючі коливання під дією зовнішньої періодично мінливої за гармонійним законом ЕРС:

$$E = E_m \cos \omega t. \quad (3.28)$$

Підставивши (3.28) у рівняння (3.12), запишемо

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = E_m \cos \omega t, \quad (3.29)$$

або

$$Q'' + 2\delta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{E_m}{L} \cos \omega t, \quad (3.30)$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  й  $\delta = \frac{R}{2L}$ .

Частковий розв'язок рівняння (3.30), що відповідає змушеним коливанням, що встановилися, заряду на обкладинках конденсатора:

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t - \alpha),$$

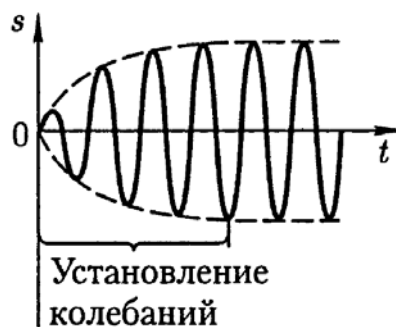
де  $Q_m$  - амплітуда заряду на конденсаторі;

$\alpha$  - різниця фаз між коливаннями заряду й зовнішньої ЕДС;  
вони визначаються виразами

$$Q_m = \frac{E_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (3.31)$$

$$\alpha = \arctg \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (3.32)$$

У режимі, що встановився (мал. 3.8) електромагнітні змушені коливання є гармонійними, відбуваються із частотою  $\omega$  зовнішньої ЕРС, амплітуда  $Q_m$  (3.31) і фаза  $\alpha$  (3.32) визначаються як частотою  $\omega$ , так і характеристиками коливального контуру.



Мал. 3.8

Сила струму при змушених коливаннях, що встановилися, у контурі

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.33)$$

З формули (3.31) випливає, що при деякій певній для даного коливального контуру частоті амплітуда  $Q_m$  досягає максимального значення.



Для визначення резонансної частоти  $\omega_{рез}$  - частоти, при якій амплітуда заряду досягне максимуму, потрібно знайти максимум функції  $Q_m(\omega)$  або, що те ж саме, мінімум підкореневого вираження. Продиференціювавши підкоренеve вираження по  $\omega$  і дорівнявши його нулю, одержимо, що резонансна частота для заряду

$$\omega_{Qрез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{(2L)^2}}. \quad (3.34)$$

Явище різкого зростання амплітуди змущених коливань при наближенні частоти зовнішньої ЕДС до частоти, рівної або близькій власній частоті коливального контуру, називають електричним резонансом.

Резонансна частота для сили струму збігається із власною частотою контуру:

$$\omega_{Iрез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (3.35)$$

#### Питання для самоконтролю

1. Що називають коливальним контуром?
2. Яка роль індуктивності в коливальному контурі?
3. Яка роль ємності в коливальному контурі?
4. Проаналізуйте послідовні стадії коливального процесу в коливальному контурі ( $R=0$ ), показавши стан контуру через кожні чверть періоду від моменту зарядки конденсатора.
5. Зіставте електричні й механічні коливання. У чому їх подібність?
6. Що являють собою вільні електромагнітні коливання?
7. Запишіть, пояснивши, закон збереження енергії в ідеалізованому коливальному контурі ( $R=0$ ).
8. Які максимальні значення енергії електричного поля в коливальному контурі? магнітного поля?
9. Опишіть перетворення енергії при вільних електромагнітних коливаннях у коливальному контурі з мізерно малим опором.
10. Яку величину для електромагнітних коливань можна зіставити тертю при механічних коливаннях? масі при механічних коливаннях?
11. Як зміниться власна частота коливань у контурі зі зменшенням відстані між обкладинками конденсатора? при введенні в котушку сердечника?
12. Чому електромагнітні коливання в реальному коливальному контурі загасають?
13. Що називають змущеними електромагнітними коливаннями? змінним струмом?
14. Що називають резонансом у ланцюзі змінного струму?

## Список літератури

1. Трофимова Т.И. Физика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Т.И.Трофимова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с. (§§ 105-110).
2. Фирсов А.В. Физика для профессий и специальностей технического и естественно-научного профилей: учебник для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования / А.В.Фирсов; под ред. Т.И.Трофимовой. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с. (§§ 154-160).
3. Трофимова Т.И. Курс физики. Учеб. пособие для вузов / Т.И.Трофимова. – Изд. 9-е, перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 560 с. (§§ 140-143, 146-148).