Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

Лекція Дії над матрицями і векторами.

План лекції.

1. Види матриць.

2. Лінійні операції над матрицями.

3. Властивості множення матриць.

1. **Види матриць.**

Матрицею називається безліч чисел, що утворюють прямокутну таблицю, яка містить m рядків і n стовпців. Для запису матриці використовується наступне позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для будь-якого елементу a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j - номер стовпця.

Якщо число рядків матриці не дорівнює числу стовпців $(m \neq n)$, то матриця називається прямокутною.

Якщо число рядків дорівнює числу стовпців $(m = n)$, то матриця називається квадратною. Число рядків або стовпців квадратної матриці називається її порядком.

Розглянемо квадратну матрицю порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональ, щомістить елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, називають головною, а діагональ, щомістить елементи a_{1n}, a_{2}, $_{n-1}$, .., a_{n1} - побічною (абододопоміжною).

Якщо в квадратній матриці елементи, які лежать вище або нижче головної діагоналі нулі, то така матриця називається трикутною.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо у неї відмінні від 0 тільки елементи, що знаходяться на головній діагоналі.

Діагональна матриця називається скалярною, якщо у неї всі числа головної діагоналі рівні між собою.

Скалярна матриця називається одиничною, якщо у неї всі числа головної діагоналі рівні 1.

Одинична матриця позначається буквою Е. Матриця, всі елементи якої рівні нулю, називається нульовою матрицею і позначається буквою О. Матриці-рядки і матриці-стовбці називаються векторами.

Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакове число рядків m й однакове число стовпців n та їх відповідні елементи рівні.

Якщо в матриці переставити рядки зі стовпчиками, то отримаємо транспоновану матрицю.

Для матриці-рядка транспонованою матрицею є матриця-стовпець.

2. **Лінійні операції над матрицями.**

Сумою матриць А і В називають таку матрицю, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць А і В.

Складати можна тільки матриці, що мають однакову будову.

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, то $C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1, & 4+3 \\ -1+1, & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

На складання матриць поширюються найважливіші властивості чисел:

1) переставнічий закон додавання :A+B = B+A

2) комбінаційний закон додавання:

(A+B)+C=A+(B+C)

A+0=A, A+(-A)=0

Множення матриці на число зводиться до множення на це число всіх елементів матриці.

Приклад 1. Помножити матрицю$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ на число k=3.

Розв’язок.

$$3A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Приклад 2.Знайти лінійну комбінацію 3A+2B, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Розв'язок.

$$3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -14 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

3. **Властивості множення матриць.**

Добутком матриць $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ називається матриця

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & + & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & + & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Приклад

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 * 1 - 1 * 3 & 3 * 1 - 1 * 1 \\ -1 * 1 + 2 * 3 & -1 * 1 + 2 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Нехай$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайдемо добутки AB і BA:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ми бачимо, що AB$\neq$ BA. Цей приклад показує, що добуток двох матриць не завжди підкоряється переставнічому закону.

Можна перевірити, що для множення матриць виконується комбінаційний закон:

A(BC)=(AB)C,

а також розподільний закон:

(A+B)C=AC+BC.

Відзначимо наступний цікавий факт.

Добуток двох ненульових матриць може бути рівним нульової матриці.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Закріплення нового матеріалу.

1. Що називається матрицею?
2. Що називається вектором?
3. Які матриці називаються прямокутними? Квадратними?
4. Які матриці називаються рівними?
5. Що називається головною і побічною діагоналлю матриці?
6. Яка матриця називається діагональною?
7. Яка матриця називається скалярною?
8. Яка матриця називається одиничною? Нульовою?
9. Яка матриця називається трикутною?
10. Що значить "транспонувати" матрицю?
11. Що називається сумою матриць?
12. Що називається добутком матриці на число?
13. Як знайти добуток двох матриць?
14. Якими властивостями володіє добуток матриць?