Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

Лекція Визначники квадратних матриць.

План лекції:

1. Обчислення визначників першого та другого порядку.
2. Обчислення визначників третього порядку.
3. Обчислення визначників n-го порядку.
4. Основні властивості визначників.

1. Обчислення визначників1-го та 2-го порядку.

Нехай дана матриця першого порядку $A=(a_{11})$. Її визначником називається елемент a_{11}.

Наприклад, нехай A=3, тоді її визначник дорівнює 3.

Визначник позначається латинською буквою D або грецькою літерою Δ

Визначником квадратної матриці другого порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, яке обчислюється за формулою

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Приклад.

Нехай $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, тоді $D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=2\cdot(-4)-5\cdot(-3)=-8+15=7$

2. Обчислення визначників 3-го порядку.

Визначником квадратної матриці третього порядку

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}=$$

$$=\left(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\right)-\left(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

Приклад.

Нехай, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ тоді

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8\end{matrix}=$$

$$=(1\cdot 5\cdot 9+2\cdot 6\cdot 7+3\cdot 4\cdot 8)-(3\cdot 5\cdot 7+1\cdot 6\cdot 8+2\cdot 4\cdot 9)=(45+84+96)-(105+48+72)=$$

$$=225-225=0$$

3. Обчислення визначників n-го порядку.

На практиці при обчисленні визначників високих порядків використовують інші формули. Для їх розгляду необхідно ввести нові поняття.

Нехай дана квадратна матриця A n-го порядку. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник матриці (n-1)-го порядку, отриманий з матриці A викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Наприклад, мінором елемента a_{12} матриці $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ буде

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31}.$$

Кожна матриця n-го порядку має n^2 мінорів (n-1)-го порядку.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

Алгебраїчне доповнення співпадає з мінором, коли $(i+j)$ - парне число, і відрізняється від мінору знаком, коли $(i+j)$ - непарне число.

Приклад. Знайти A_{11} елемента a_{11} і A_{12} елемента a_{12} матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=M_{11}=2-1=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot M_{12}=-1\cdot(4-1)=-3$$

Важливе значення для обчислення визначників має наступна теорема. Теорема Лапласа. Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.
Значення теореми Лапласа полягає в тому, що дозволяє звести обчислення визначників n-го порядку до обчислення простіших визначників (n-1)-го порядку.
Приклад. Обчислимо визначник трикутної матриці, розкладаючи його по 1-му стовпцю:

$$D=\begin{vmatrix}5&3&0&7\\0&-1&2&3\\0&0&3&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&3&1\\0&0&1\end{vmatrix}+0+0+0=$$

$$=5\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)\cdot(3-0)=-15$$

4. **Основні властивості визначників.**
   1) Визначник не зміниться, якщо його транспонувати. Приклад. Нехай $D=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2$, тоді $D^T=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=4-6=-2$.
   2) При перестановці двох рядків (або стовпців) визначник змінить свій знак на протилежний. Приклад. Нехай $D=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2$, тоді $\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=6-4=2$ або $\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=6-4=2$.
   3) Загальний множник всіх елементів рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника. Нехай $D=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2$, тоді $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=2\cdot(2-3)=2\cdot(-1)=-2$.
   4) Визначник з двома однаковими рядками або стовпцями дорівнює нулю. Приклад. $D=\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=2-2=0$
   5) Якщо всі елементи двох рядків (або стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
      Приклад. $D=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}=2-2=0$
   6) Якщо до будь-якого рядку (чи стовпцю) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини.

Приклад. Нехай $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$, тоді

$$\begin{vmatrix} 1+ & 3\cdot 2 & 2 \\ 3+ & 3\cdot 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2.$$

7) Трикутний визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі. Приклад. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

Закріплення нового матеріалу.

1. Як обчислити визначник матриці 1-го порядку?
2. Як обчислити визначник матриці 2-го порядку?
3. Як обчислити визначник матриці 3-го порядку?
4. Що називається мінором?
5. Що називається алгебраїчним доповненням?
6. Як розкласти визначник за елементами стовпця або рядка?
7. Назвіть властивості визначників?