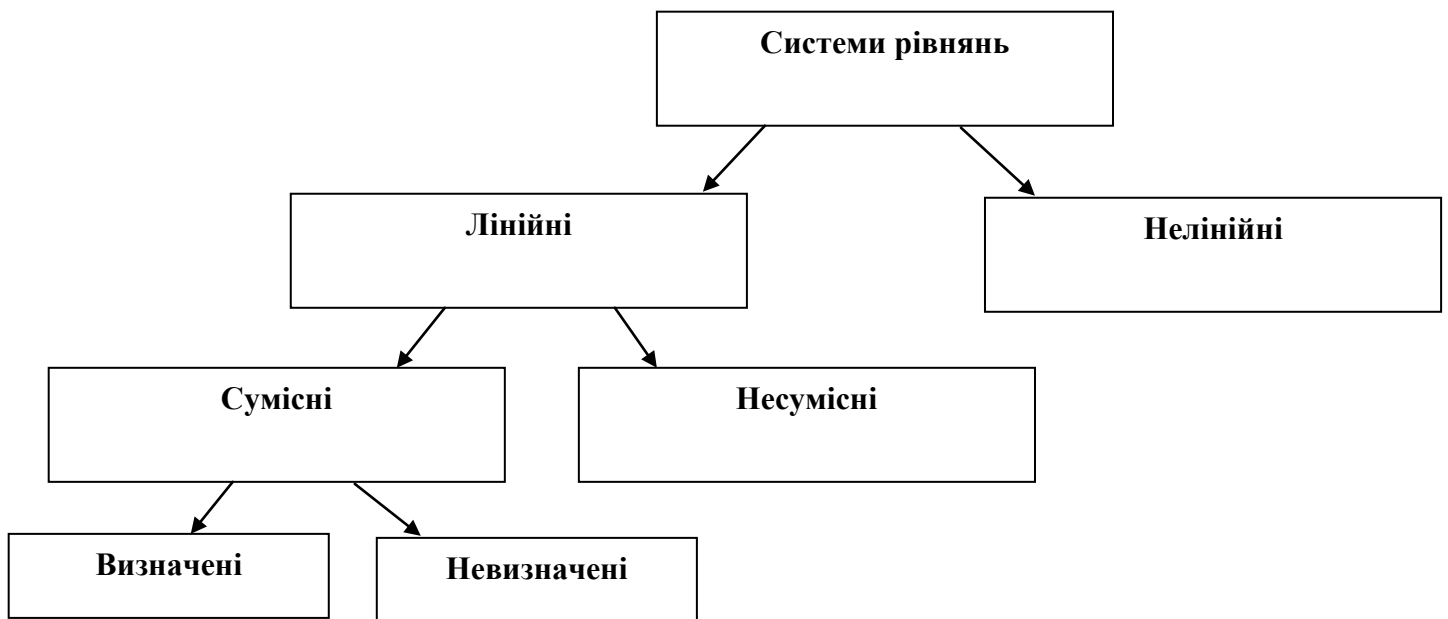


**Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри.
Лекція Системи лінійних рівнянь.**

План лекції.

1. Класифікація систем рівнянь.
2. Теорема Крамера.
3. Окремий випадок розв'язання систем лінійних рівнянь.

1. Класифікація систем рівнянь.



Визначення 1. Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має розв'язання.

Визначення 2. Система рівнянь називається несумісною, якщо вона не має розв'язання.

Визначення 3. Система рівнянь називається визначеною, якщо вона має тільки одне розв'язання.

Визначення 4. Система рівнянь називається невизначеною, якщо вона має нескінчену кількість розв'язків.

2. Теорема Крамера.

Система n рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, завжди має розв'язок і при тому тільки один. Він знаходиться так: значення кожного з невідомих дорівнює дробу, знаменником якої є

визначник системи, а чисельник виходить з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів при шуканому невідомому на стовпець вільних членів.

Формули Крамера для розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими записуються так:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \text{ де } i=1,2,3 \dots n$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Знайдемо визначник системи Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$$

2) Знайдемо визначник Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 21 = -33$$

3) Знайдемо визначник Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11$$

4) Знайдемо значення x і y за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1$$

3. Окремі випадки розв'язання систем лінійних рівнянь.

Розглянемо випадок, коли визначник системи дорівнює нулю. Тут можливі два варіанти:

1) $\Delta = 0$ та кожний визначник $\Delta x_i = 0$

Це має місце тільки тоді, коли коефіцієнти при невідомих x_i пропорційні, тобто кожне рівняння системи виходить з першого рівняння множенням обох його частин на число K . Очевидно, що при цьому система має нескінчену безліч розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}; k=3$$

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2) \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3) \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Відповідь: нескінчена безліч розв'язків

$$2) \Delta = 0 \text{ і хоча б один з визначників } \Delta x_i \neq 0$$

Це має місце тільки тоді, коли коефіцієнти при всіх невідомих, крім x_i пропорційні. Отримаємо систему з суперечних рівнянь, яка не має розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2) \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$3) \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$$

Відповідь: розв'язків немає

Закріплення нового матеріалу.

1. Класифікуйте системи рівнянь.
2. Сформулюйте теорему Крамера.
3. Запишіть формули Крамера.
4. Опишіть окремі випадки розв'язання систем лінійних рівнянь.