

## Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

### Лекція Рівняння лінії на площині.

#### План лекції:

1. Рівняння лінії.
2. Загальне рівняння прямої.
3. Рівняння прямої з нормальним вектором.

#### 1. Рівняння лінії.

Нехай дано рівняння з двома змінними. Розв'язанням цього рівняння, як правило, є нескінченні пари чисел, які на площині дають безліч точок, які називаються графіком даного рівняння.

Рівняння лінії на площині називається рівняння з двома змінними  $x$  і  $y$ , якому задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на лінії, і не задовольняють координати будь-якої точки, не лежачій на цій лінії.

Кажуть, що координати точки задовольняють рівнянню, якщо при підстановці їх в дане рівняння воно перетворюється на тотожність.

**Приклад 1.** Визначити, чи лежать точки  $A(2;5)$  і  $B(1; 2,2)$  на лінії, заданої рівнянням

$$3x - 5y + 8 = 0$$

#### Розв'язок.

- 1) Підставивши у рівняння координати точки  $A$ , одержимо

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 5 + 8 = -11 \neq 0$$

Отже точка  $A$  не належить заданій лінії.

- 2) Підставивши у рівняння координати точки  $B$ , отримаємо

$$3 \cdot 1 - 5 \cdot 2,2 + 8 = 3 - 11 + 8 = 0 . \text{ Отже, точка } B \text{ лежить на заданій лінії.}$$

#### 2. Загальне рівняння прямої.

Прямі - найпростіші лінії на площині. Їм відповідають і найпростіші рівняння - рівняння першого ступеня.

Рівняння  $Ax + By + C = 0$  називається загальним рівнянням прямої. Коефіцієнти  $A, B$  і  $C$  прийнято записувати у вигляді цілих чисел.

Розглянемо окремі випадки загального рівняння прямої.

1. Нехай

$$A=0, \text{ тоді } By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} .$$

Отримаємо рівняння прямої, паралельної осі абсцис.

2. Нехай  $B=0$ , тоді  $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} .$

Отримаємо рівняння прямої, паралельної осі ординат.

3. Нехай  $A=0, C=0$  тоді  $Bu=0$ , звідки  $y = \frac{0}{B} = 0$ .

Отримаємо рівняння осі абсцис.

4. Нехай  $B=0, C=0$ , тоді  $Ax=0$ , звідки  $x = \frac{0}{A} = 0$ .

Отримаємо рівняння осі ординат.

5. Нехай  $C=0$ , тоді  $Ax + Bu = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x = kx$ .

Отримаємо рівняння прямої, що проходить через початок координат з умовним коефіцієнтом  $k = -\frac{A}{B}$ .

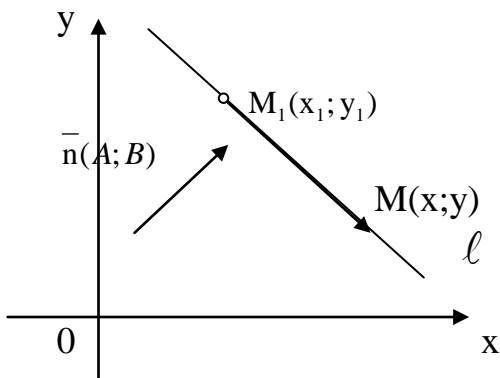
Умовним коефіцієнтом називається тангенс кута нахилу прямої до додатнього напрямку осі абсцис:  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Якщо кут нахилу гострий, то  $k > 0$ ;

якщо ж кут нахилу тупий, то  $k < 0$ ;

### 3. Рівняння прямої з нормальним вектором.

Нормальним вектором прямої  $\ell$  називається будь-який ненульовий вектор  $\vec{n}(A, B)$ , перпендикулярний цій прямій.



Нехай задані точка  $M_1(x_1; y_1)$  і нормальний вектор  $\vec{n}(A, B)$ .

Складемо рівняння прямої, що проходить через точку  $M_1$  і має нормальний вектор  $\vec{n}$ :

1. Виберемо на прямій  $\ell$  довільну точку  $M(x; y)$ .

2. Знайдемо координати вектора  $\vec{M_1M}(x - x_1; y - y_1)$ .

3. Скористаємося умовою перпендикулярності векторів  $\vec{M_1M}$  і  $\vec{n}$ .

$$\text{т. к. } \vec{M_1M} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{M_1M} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. (*)$$

Перетворимо це рівняння:

$$Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0; \quad Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0;$$

Вважаючи  $(-Ax_1 - By_1) = C$ , отримаємо рівняння прямої  $\ell$  у вигляді  $Ax + By + C = 0$ .

Зауважимо, що якщо відомо загальне рівняння прямої, то координати нормального вектора  $\vec{n}(A, B)$  рівні коефіцієнтам при  $x$  і  $y$  в цьому рівнянні.

**Приклад 1.** Відомі точки  $M_1(7;-8)$  і нормальний вектор прямої  $\vec{n}(-2;3)$ .  
Скласти рівняння прямої.

Розв'язок.

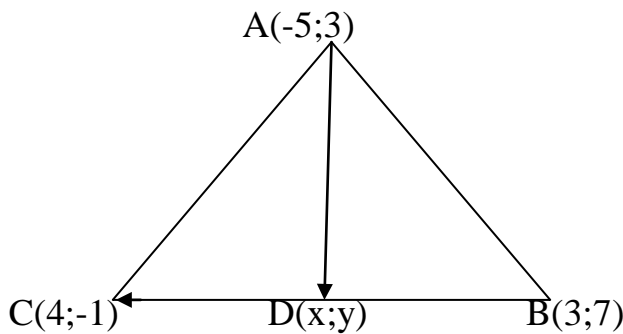
Скористаємося формулою (\*):

$$-2(x-7)+3(y+8)=0 \Rightarrow -2x+14+3y+24=0 \Rightarrow -2x+3y+38=0$$

**Відповідь:**  $-2x+3y+38=0$

**Приклад 2.** Скласти рівняння висоти AD трикутника, заданого точками  $A(-5;3)$ ,  $B(3;7)$ ,  $C(4;-1)$ .

Розв'язок.



1. Зробимо символічний малюнок.

2.  $\vec{AD}(x+5; y-3)$ .

3.  $\vec{BC}(4-3; -1-7) = \vec{BC}(1;-8)$ .

4. Т.к.  $\vec{BC} \perp \vec{AD}$ , то

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow$$

$$1 \cdot (x+5) - 8(y-3) = 0 \Rightarrow x+5-8y+24=0 \Rightarrow x-8y+29=0$$

**Відповідь:**  $x-8y+29=0$ .

**Закріплення нового матеріалу.**

1. Що називається рівнянням лінії?
2. Лежать точки  $A(-3;9)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(7;2)$  на лінії, заданої рівнянням  $x^2 - y = 0$  ?
3. Яким рівнянням описується пряма на площині?
4. Запишіть рівняння осей координат.
5. Запишіть рівняння прямих, паралельних осям координат.
6. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку  $A(5;-3)$  і має нормальний вектор  $\vec{n}(2;-4)$ .