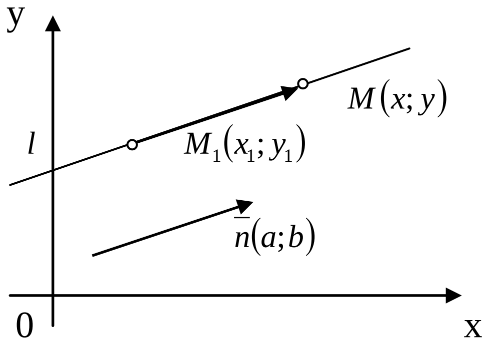
Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.
Лекція Рівняння лінії на площині.

План лекції.
1. Рівняння прямої з напрямним вектором.
2. Рівняння прямої заданої двома точками.
3. Рівняння прямої на відрізках.

1. Рівняння прямої з спрямованим вектором.
Напрямним вектором прямої ℓ називається всякий ненульовий вектор $\overline{n}(a,b)$, паралельний цій прямій. Будь-яка пряма має нескінченну безліч напрямних векторів, колінеарних між собою.



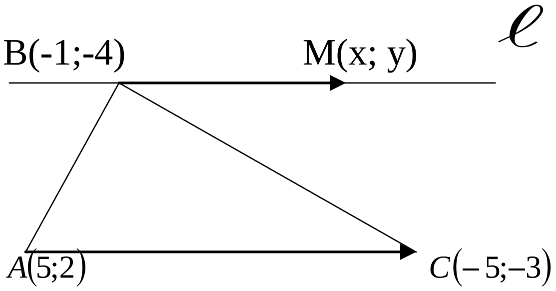
Нехай задані точка $M_1(x_1;y_1)$, через яку проходить пряма l, і її напрямлений вектор $\overline{n}(a,b)$.
Складемо рівняння прямої.
1. Виберем будь-яку точку $M(x,y)\in l$.
2. Знайдемо вектор $\overline{M_1M}(x-x_1;y-y_1)$.
3. Т. к. $\overline{M_1M} \parallel \overline{n}$, то їх однойменні координати повинні бути пропорційні.
Тому рівняння прямої l має вигляд:
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \quad (*)$$
Приклад 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(3;-2)$ і має напрямний вектор $\overline{n(-5;3)}$.

Розв’язок.

Скористаємося формулою (*).
$\frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{3}$; $3(x-3)=-5(y+2)$; $3x-9=-5y-10$; $3x+5y+1=0$.
Відповідь: $3x+5y+1=0$
Приклад 2. Трикутник заданий точками $A(5;2)$, $B(-1;-4)$, $C(-5;-3)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку В паралельно АС.

Розв’язок.

1. Зробимо символічний малюнок.
$B(-1;-4)$ $M(x;y)$ l



2. Вибираємо точку $M(x;y)$ на прямій l.

3. Знайдемо вектор $\overline{BM}(x+1;y+4)$.

4. Знайдемо вектор $\overline{AC}(-5-5;-3-2)=\overline{AC}(-10;-5)$.

5. Т. к. $BM \parallel AC$, то повинна виконуватися умова:

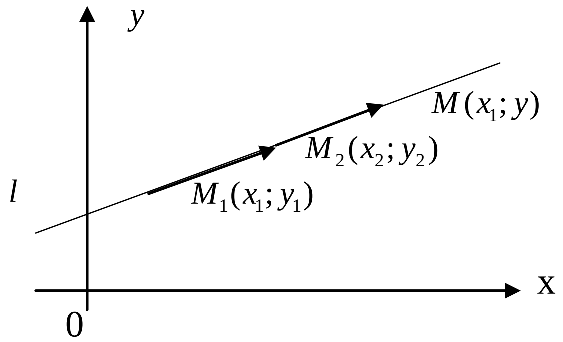
$\frac{x+1}{-10}=\frac{y+4}{-5}$; $-5(x+1)=-10(y+4)$; $-5x-5=-10y-40$;

$-5x+10y+35=0$; $x-2y-7=0$,

Відповідь: $x-2y-7=0$

2. Рівняння прямої заданої двома точками.

Нехай задані дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, через них можна провести пряму до того ж лише одну.Складемо рівняння цієї прямої.



1. Виберемо на прямій l точку $M(x;y)$.

2. Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M}(x-x_1;y-y_1)$.

3. Знайдемо координати вектора $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$.

4. Т. к. $\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$, то повинна виконуватися умова: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (*)

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(2;3)$ і $B(7;5)$.

Розв’язок.

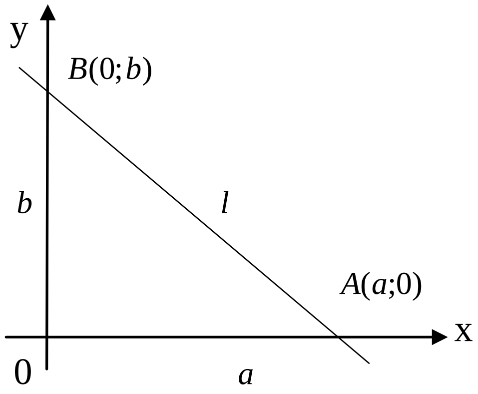
Підставивши у формулу (*) координати даних точок отримаємо $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{5-3}$,

$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2}$;

$2(x-2)=5(y-3)$, $2x-4=5y-15$; $2x-5y+11=0$

Відповідь: $2x-5y+11=0$

3. Рівняння прямої у відрізках.



Нехай задана пряма l, що відсікає на осі абсцис відрізок, рівний a, а на осі ординат відрізок, равний b.

Складемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки.

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0};\ \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b};\ \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b};$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (*)$$

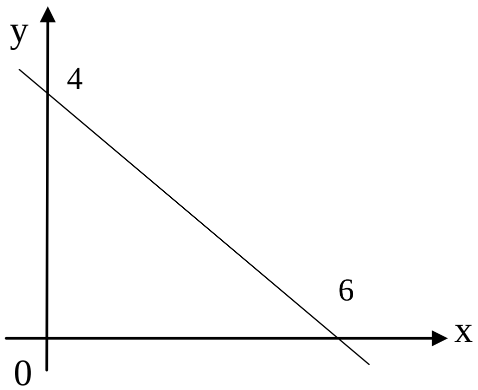
Рівняння прямої у відрізках зручно користуватися для побудови прямої. Тому при необхідності рівняння прямої призводять до виду рівняння у відрізках і будують пряму.

Приклад 1. Побудувати пряму $2x+3y-12=0$

Розв'язок. Перетворимо рівняння:

$$2x+3y=12;\ \frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}=\frac{12}{12};\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1.$$

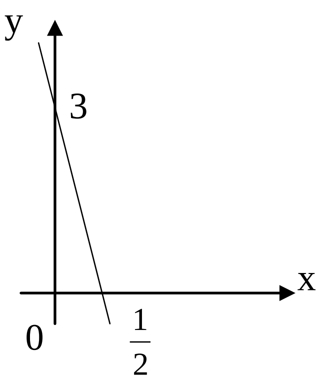
Значить, на осі абсцис відкладаємо 6 одиниць, а на осі ординат 4 одиниці і проводимо пряму.



Приклад 2. Побудувати пряму $6x+y-3=0$.

Розв'язок. Перетворимо рівняння:

$$6x+y=3;\ 2x+\frac{y}{3}=1;\ \frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{3}=1,$$



Закріплення нового материалу.

1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5;-3)$ і має напрямний вектор $\overline{a}(-3;-2)$.
2. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $A(3;-8)$ і $B(-1;2)$.
3. Складіть рівняння прямої, що відсікає 5 одиниць на осі абсцис і 3 одиниці на осі ординат.