Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.
Лекція Дослідження взаємного розміщення прямих.

План лекції.

1. Паралельність прямих.
2. Перпендикулярність прямих.
3. Кут між двома прямими.

1. **Паралельність прямих.**

Нехай на площині задано дві прямі

$A_1x + B_1y + C_1 = 0(l_1)$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0(l_2)$.

Нормальні вектори цих прямих мають такі координати: $\overline{n_1}(A_1; B_1)$, $\overline{n_2}(A_2; B_2)$.

Якщо $l_1 \parallel l_2$, то їх нормальні вектори колінеарні. Це означає, що одноймені координати векторів пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Отже, дві прямі паралельні, тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при відповідних координатах пропорційні.

$\downarrow \underline{\overline{n_1}(A_1; B_1)}$ ______ l_1

$\downarrow \underline{\overline{n_1}(A_2; B_2)}$ ______ l_2

Приклад. Установити, паралельні чи прямі:

$a)$ $2x - 3y + 5 = 0$; $\underline{\overline{n_1}(2;-3)}$;

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9};\ \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

$6x - 9y + 1 = 0$; $\underline{\overline{n_2}(6;-9)}$

б) $6x - 3y - 1 = 0$; $\underline{\overline{n_1}(6;-3)}$;

$$\frac{6}{2} \neq \frac{-3}{-5};\ 3 \neq 0.6 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

$2x - 5y + 5 = 0$; $\underline{\overline{n_2}(2;-5)}$

2. Перпендикулярність прямих.

Нехай на площині задані дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0\ (l_1)$та $A_2x + B_2y + C_2 = 0\ (l_2)$

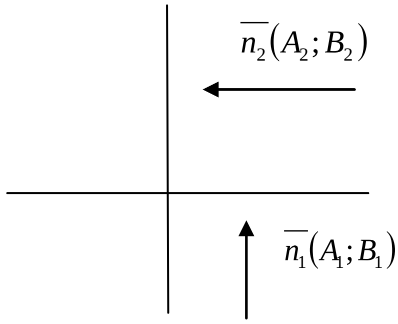
Тоді координати їх нормальних векторів такі: $\underline{\overline{n_1}(A_1; B_1)}$, $\underline{\overline{n_2}(A_2; B_2)}$.

Якщо $l_1 \perp l_2$, то скалярний добуток цих векторів має дорівнювати нулю, тобто $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$, звідки $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Отже, дві прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однойменних координатах задовольняють рівності

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

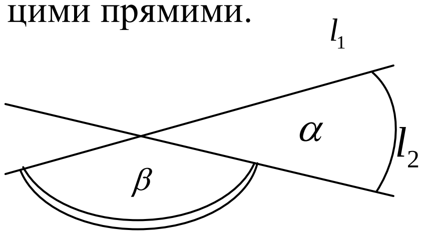
Приклад.
Встановити чи перпендикулярні прямі:



$$\begin{array}{l|l|l} 2x+3y-7=0 & \overline{n}_1(2;3) & \\ \underline{3x-2y=0} & \overline{n}_2(3;-2) & 2\cdot 3+3(-2)=6-6=0 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} 6x-4y+7=0 & \overline{n}_1(6;-4) & \\ \underline{8x-12y-1=0} & \overline{n}_2(8;-12) & 6\cdot 8+(-4)\cdot(-12)=48+48=96\neq 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \end{array}$$

Кут між двома прямими.
Кутом між двома прямими називається величина меншого з кутів, утворених цими прямими.



L - кут між прямими l_1 та l_2.
Кут між двома прямими можна знайти з формули скалярного добутку нормальних векторів до прямих l_1 та l_2:

$\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\left|\dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}\right|^{(*)}$,де $\overline{n_1}$ і $\overline{n_2}$ - нормальні вектори прямих l_1 та l_2.

Ця формула зручна для обчислення кута між прямими, заданими їх рівняннями.
Приклад. Знайти кут між прямими.
$x+5y-3=0$ та $2x-3y+4=0$

Розв'язок

1) Знайдемо координати нормальних векторів заданих прямих.
$\overline{n_1}(1;5),\overline{n_2}(1;5)$
2) Відповідно до формули (*), одержимо

$$\cos\alpha=\left|\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}\right|=\left|\frac{1\cdot 2+5\cdot(-3)}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{2-15}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}\right|=\left|\frac{-13}{\sqrt{2\cdot 13}\cdot\sqrt{13}}\right|=\frac{13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$\alpha=45^0$

Закріплення нового матеріалу.
1) Сформуйте умови паралельності прямих
2) Встановити, чи паралельні прямі:

а) $\begin{array}{l} 5x-y+4=0 \\ 10x-2y+1=0 \end{array}$

б) $\begin{matrix} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{matrix}$

3) Сформулюйте умову перпендикулярності прямих.
4) Встановити, чи перпендикулярні прямі:

а) $\begin{matrix} 2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} 3x + 2y + 17 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{matrix}$

5) Чи впливають числа C_1 та C_2 в рівняннях прямих на перпендикулярність і паралельність цих прямих? Якщо ні, то на що вони впливають?
6) Дайте визначення кута між двома прямими.
7) Як знайти кут між прямими?
8) Чому у формулі для знаходження кута між двома прямими стоїть знак модуля?
9) У яких випадках зручно користуватися формулою для обчислення кута між прямими?