

Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

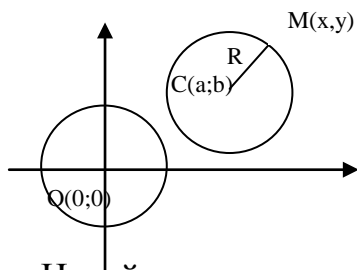
Лекція Коло та сфера.

План лекції.

1. Рівняння кола.
2. Рівняння сфери.
3. Алгоритм переходу до канонічного рівняння кола та сфери.

1. Рівняння кола.

Колом називається безліч всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки, званої центром.



Нехай центром кола є точка $C(a; b)$, а відстань до будь-якої точки $M(x; y)$ кола дорівнює R .

Тоді згідно з формулою відстані між двома точками маємо:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Після зведення в квадрат знаходимо

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

Це канонічне рівняння кола з центром в точці $C(a, b)$ і радіусом R .

Підставивши в рівняння (1) $a = 0$, $b = 0$, отримаємо канонічне рівняння кола з центром в початку координат:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (2)$$

Приклад 1. Скласти рівняння кола з центром $C(3; -2)$ і радіусом $R = 5$.

Розв'язок.

Підставивши $a = 3$, та $b = -2$ та $R = 5$ в рівняння (1), отримаємо

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

Приклад 2. Скласти рівняння кола з центром на початку координат і радіусом 7.

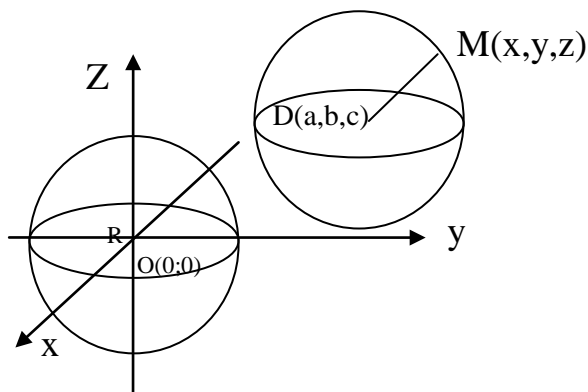
Розв'язок.

В цьому випадку $a = 0$, $b = 0$. Підставивши $R = 7$ в рівняння (2), отримаємо

$$x^2 + y^2 = 49$$

2. Рівняння сфери.

Сферою або кульовою поверхнею називається безліч точок простору, рівновіддалених від однієї точки, званої центром.



Нехай центром сфери є точка $D(a,b,c)$, а відстань до будь-якої точки $M(x,y,z)$ сфери дорівнює R .

Тоді згідно з формулою відстані між двома точками маємо:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Після зведення в квадрат знаходимо

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Це канонічне рівняння сфери з центром в точці $D(a,b,c)$ і радіусом R .

Підставивши в рівняння (1) $a=0$, $b=0$, $c=0$, отримаємо канонічне рівняння сфери з центром в початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2)$$

Приклад 1. Скласти рівняння сфери з центром $D(5,-2,-1)$ і радіусом $R=4$.

Розв'язок.

Підставивши $a=5$; $b=-2$; $c=-1$ та $R=4$ в рівняння (1), отримаємо

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 16.$$

Приклад 2. Скласти рівняння сфери з центром на початку координат і радіусом 7.

Розв'язок.

В цьому випадку $a=b=c=0$. Підставивши $R=7$ в рівняння (2), отримаємо

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

3. Алгоритм переходу до канонічного рівняння кола та сфери.

Покажемо на конкретних прикладах алгоритм переходу до канонічного рівняння кола та сфери. Для цього згадаємо формули скороченого множення:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Приклад 1. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ задає коло. Знайти її центр і радіус.

Розв'язок.

1. Згрупуємо змінні x і y :

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) - 3 = 0$$

2. Доповнимо вираз в дужках до повних квадратів:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) - 3 - 9 - 4 = 0$$

3. Запишемо канонічне рівняння кола:

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Відповідь: Коло з центром $C(-3;2)$ і радіусом 4.

Приклад 2. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 4 = 0$ задає сферу.

Знайти її центр і радіус.

Розв'язок.

$$1) (x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) + (z^2 + 8z) + 4 = 0$$

$$2) (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) + 4 - 9 - 4 - 16 = 0$$

$$3) (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$$

Відповідь: $D(3;2;-4)$, $R = 5$.

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення кола.

2. Дайте визначення сфери.

3. Запишіть канонічні рівняння кола та сфери.

4. Коло задано рівнянням

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 1. \text{ Знайти центр і радіус.}$$

5. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$ задає коло. Знайти його центр і радіус.

6. Написати рівняння сфери з центром в точці $D(-2,3,-1)$ і радіусом 8.

7. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 12y - 2z - 2 = 0$ задає сферу.

Знайти її центр і радіус.