**Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.**
**Лекція   Еліпс та еліпсоїд**

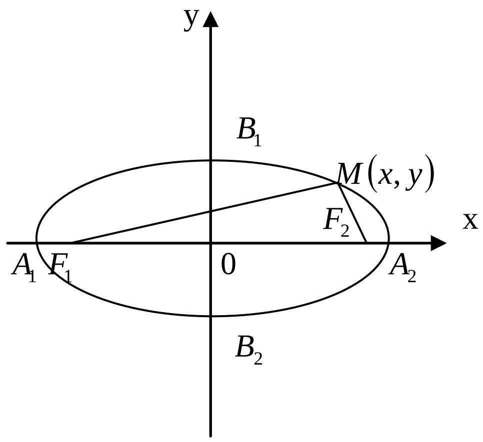
**План лекції.**

1. Рівняння еліпса.
2. Рівняння еліпсоїда.
3. Алгоритм переходу до канонічного рівняння еліпса і еліпсоїда.

1. **Рівняння еліпса**.

Еліпсом називається безліч точок на площині, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина постійна. Фокуси еліпса прийнято позначати буквами $F_1$ і $F_2$, відстань між фокусами - через 2с. Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a і b - півосі еліпса.

Розглянемо основний випадок знаходження еліпса щодо осей координат.




Положення фокусів $F_1,\ F_2 \in OX$
Координати фокусів $F_1(-c;0), F_2(c;0)$
Співвідношення між a і b – a>b
Велика вісь $A_1A_2=2a$
Мала вісь $B_1B_2=2b$
Фокусна відстань $F_1F_2=2c$
Ексцентриситет $\xi=c/a$
Співвідношення між a, b і c $a^2-b^2=c^2$
Ексцентриситетом еліпса називається відношення відстані між фокусами до довжини великої осі.

$\xi=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$, Т. к. 2a>2c , то $0\le\xi<1$

Якщо $\xi\approx1$, то еліпс сильно витягнут, якщо ж $\xi\approx0$, то еліпс має більш округлу форму. Якщо $\xi=1$, то еліпс вироджується в коло.

**Приклад**. Еліпс заданий рівнянням $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

Знайти координати фокусів, фокусну відстань ексцентриситет.

**Розв'язок**.

$a^2-b^2=c^2$

1) 100-36=64; $c=\sqrt{64}=8$

$F_1(-8;0), F_2(8;0)$

2) $2c=2\cdot 8=16$

3) $\xi=\frac{c}{a}=\frac{8}{10}=0{,}8$

**Відповідь**: $F_1(-8;0), F_2(8;0)$; 2c=16 ; $\xi=0{,}8$

Усі планети, зірки та багато комет рухаються в просторі по еліптичним орбітам.

2. **Рівняння еліпсоїда**

Еліпсоїдом обертання називається поверхня, отримана при обертанні еліпса навколо однієї з його осей.

Розглянемо основний випадок. Нехай у просторі дані прямокутна система координат і лежить в площині XOY еліпс

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$; z=0.

Обертаючи даний еліпс навколо осі абсцис, одержуємо еліпсоїд обертання, канонічне рівняння якого має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, де a і b - півосі (a>b).

Всі планети і зірки мають форму еліпсоїда.

**Приклад**. Еліпс з півосями a=6 і b=4 і центром на початку координат обертається навколо своєї великої осі, що збігається з віссю абсцис. Скласти рівняння поверхні, що описується елліпсом при його обертанні.

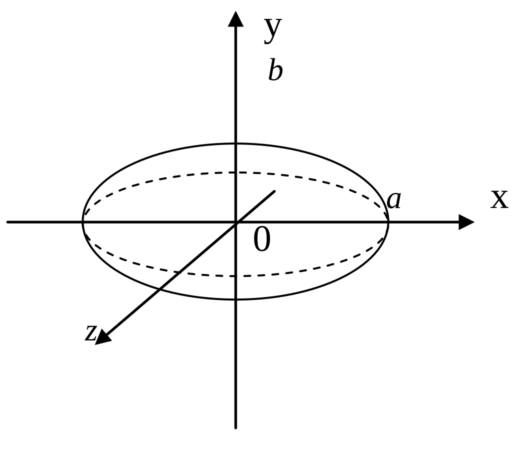
**Розв'язок**.

Рівняння еліпсоїда обертання

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

Т. к. $a^2=6^2=36$, $b^2=4^2=16$, то шукане рівняння еліпсоїда має вигляд:

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$



3. **Алгоритм переходу до канонічного рівняння еліпса і еліпсоїда**.

**Приклад**. Розглянемо алгоритм переходу до канонічного рівняння еліпса на конкретному прикладі.

Довести, що лінія, задана рівнянням

$4x^2+9y^2-16x-54y+61=0$ є еліпсом.

Знайти координати центра і піввісі.

**Розв'язання**.

1) Згрупуємо змінні x і y:

$$(4x^2-16x)+(9y^2-54y)+61=0$$

$$4(x^2-4x)+9(y^2-6y)+61=0$$

2) Доповнимо вираз в дужках до повних квадратів:

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2-6y+9)+61-16-81=0$$

$$4(x-2)^2+9(y-3)^2-36=0$$

3) Запишемо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{4(x-2)^2}{36}+\frac{9(y-3)^2}{36}=\frac{36}{36};\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

**Відповідь**: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$; C(2;3), a=3, b=2

Розглянемо алгоритм переходу до канонічного рівняння еліпсоїда обертання на конкретному прикладі.

**Приклад**. Довести, що поверхня, задана рівнянням

$9x^2+16y^2+16z^2-18x-64y-96z+73=0$ є еліпсоїдом обертання. Знайти координати центра і піввісі.

**Розв'язання.**

1) Згрупуємо змінні x, y і z:

$$9(x^2-2x)+16(y^2-4y)+16(z^2-6z)+73=0$$

2) Доповнимо вираз в дужках до повних квадратів:

$$9(x^2-2x+1)+16(y^2-4y+4)+16(z^2-6z+9)+73-9-64-144=0$$

$$9(x-1)^2+16(y-2)^2+16(z-3)^2=144$$

3) Запишемо канонічне рівняння еліпсоїда обертання:

$$\frac{9(x-1)^2}{144}+\frac{16(y-2)^2}{144}+\frac{16(z-3)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{9}=1$$

**Відповідь:** C(1;2;3), a=4, b=3.

**Закріплення нового матеріалу.**

1. Дайте визначення еліпса.
2. Запишіть канонічне рівняння еліпса.
3. Розгляньте основний випадок розташування еліпса щодо осей координат.
4. Як розташований еліпс в залежності від його ексцентриситету?
5. Дайте визначення еліпсоїда обертання.
6. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда обертання (основний випадок).

7. Сформулюйте алгоритм переходу до канонічного рівняння еліпса і еліпсоїда.
8. Приведіть приклади еліпса і еліпсоїда з навколишнього оточення.