Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

Лекція Гіпербола та гіперболоїд обертання.

План лекції

1.Рівняння гіперболи.

2.Рівняння однополого та двуполого гіперболоїда.

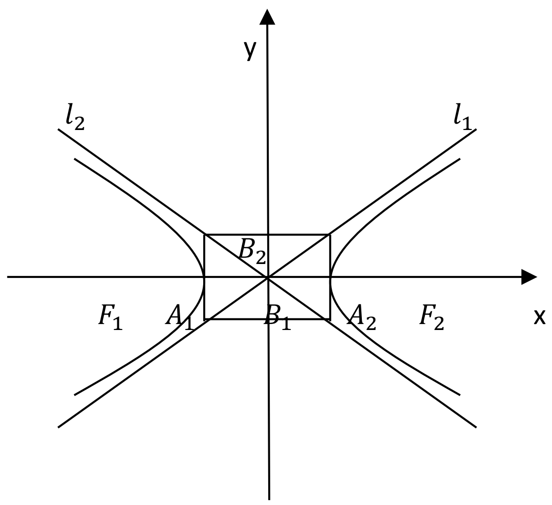
3.Алгоритм переходу до канонічного рівняння гіперболи та гіперболоїда обертання.

1. Рівняння гіперболи

Гіперболою називається безліч точок на плоскості, різниця відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, званих фокусами, є величина постійна. Ця постійна величина додатна й менше відстані між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$, де а,в і с пов'язані між собою рівнянням $а^2 + в^2 = с^2$ (мал.1)

Розглянемо основний випадок розташування гіперболи щодо осей координат.



(мал.1)

Положення фокусів	$F_1;\ F_2 \epsilon ox$
Координати фокусів	$F_1(-C;0);\ F_2(C;0)$
Дійсна вісь	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$
Уявна вісь	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$
Фокусна відстань	$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$
Ексцентриситет	$\varepsilon = c/a$
Співвідношення між a,b та c	$c^2 = a^2 + b^2$
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Прямі l_1 та l_2 називаються асимптотами;

їх рівняння мають вигляд: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Приклад. Знайти координати фокусів, довжини осей, ексцентриситет та рівняння асимптот гіперболи заданої рівнянням $16x^2 - 25y^2 = 400$

Розв'язок

1. $\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400} \to \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
2. $a^2 = 25 \to a = 5;\quad в^2 = 16 \to в = 4$

   $2a = 10 \qquad\qquad 2в = 8$
3. $c^2 = a^2 + в^2 = 25 + 16 = 41 \to c = \sqrt{41}$
4. $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{5};\quad y = \pm\frac{4}{5}x$

Відповідь: $F_1(-\sqrt{41};0);\ F_2(\sqrt{41};0);\ 10;\ 8;\ \frac{\sqrt{41}}{5};\ y = \pm\frac{4}{5}x$

Багато комет рухаються в просторі по гіперболічним орбітам.

2. Рівняння однополого та двуполого гіперболоїда.

Однополим гіперболоїдом обертання називається поверхня, отримана при обертанні гіперболи навколо її уявної вісі.

Нехай в площині ХОУ гіпербола задана рівнянням $\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1,\ z = 0$

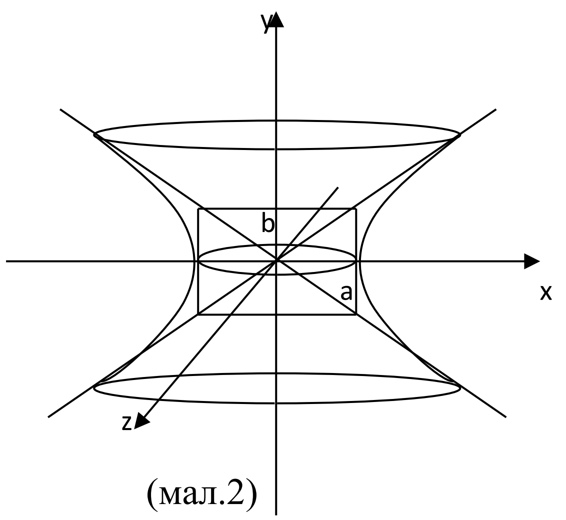
Обертаючи гіперболу навколо її уявної вісі ОУ отримаємо однополий гіперболоїд обертання, канонічне рівняння якого має вигляд

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ (мал. 2)

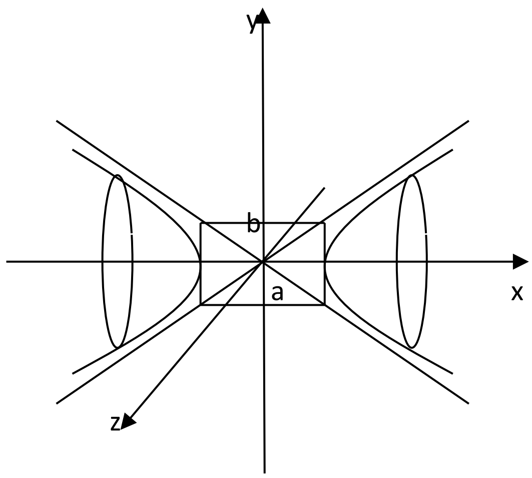
Обертаючи гіперболу навколо її дійсної вісі ОХ отримаємо двуполий гіперболоїд обертання, канонічне рівняння якого має вигляд

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ (мал.3)

Двуполим гіперболоїдом обертання називається поверхня, отримана при обертанні гіперболи навколо її дійсної вісі.



(мал.2)



(мал.3)

3. Алгоритм переходу до канонічного рівняння гіперболи та гіперболоїда.

Розглянемо алгоритм переходу до канонічного рівняння гіперболи.

Приклад 1.

Довести, що лінія, задана рівнянням $4x^2 - 16x - 9y^2 + 54y - 101 = 0$ є гіперболою.

Розв'язок.

1) Згрупуємо змінні x і y:

$$(4x^2 - 16x) - (9y^2 - 54y) - 101 = 0$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) - 101 = 0$$

2) Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) - 101 - 16 + 81 = 0$$

$$4(x-2)^2 - 9(y-3)^2 = 36$$

3) Запишемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36}; \qquad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Відповідь: C(2;3), a=3, b=2

Розглянемо алгоритм переходу до канонічного рівняння однополого гіперболоїда обертання.

Приклад 2.

Довести, що поверхня, задана рівнянням

$x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x - 8y - 4z - 3 = 0$ є однополим гіперболоїдом обертання.

Знайти координати центра і піввісі.

Розв'язок.

1) Згрупуємо змінні x, y, z:

$$(x^2 - 2x) - (4y^2 + 8y) + (z^2 - 4z) - 3 = 0$$

$$(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 2y) + (z^2 - 4z) - 3 = 0$$

2) Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) - 3 - 1 + 4 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 - 4(y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$$

3) Запишемо канонічне рівняння однополого гіперболоїда:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{4(y+1)^2}{4} + \frac{(z-2)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}+\frac{(z-2)^2}{4}=1$$

Відповідь: C(1; -1; 2); a=2, b=1.

Розглянемо алгоритм переходу до канонічного рівняння двуполого гіперболоїда обертання.

Приклад 3. Довести, що поверхня, задана рівнянням

$9x^2-16y^2-16z^2-18x+64y-32z-215=0$ є двуполим гіперболоїдом обертання.

Знайти координати центра і піввісі.

Розв'язок.

1) Згрупуємо змінні x, y і z:

$$(9x^2-18x)-(16y^2-64y)-(16z^2+32z)-215=0$$

$$9(x^2-2x)-16(y^2-4y)-16(z^2+2z)-215=0$$

2) Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$9(x^2-2x+1)-16(y^2-4y+4)-16(z^2+2z+1)-215-9+64+16=0$$

$$9(x-1)^2-16(y-2)^2-16(z+1)^2=144$$

3) Запишемо канонічне рівняння двуполого гіперболоїда обертання:

$$\frac{9(x-1)^2}{144}-\frac{16(y-2)^2}{144}-\frac{16(z+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

Відповідь: C(1; 2; -1); a=4, b=3.

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення гіперболи.
2. Запишіть канонічне рівняння гіперболи.
3. Розгляньте основний випадок розташування гіперболи щодо осей координат.
4. Дайте визначення однополого гіперболоїда обертання.
5. Запишіть канонічне рівняння однополого гіперболоїда обертання.
6. Дайте визначення двуполого гіперболоїда обертання.
7. Запишіть канонічне рівняння двуполого гіперболоїда обертання.