

Модуль 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія.

Лекція Парабола і параболоїд обертання.

План лекції.

1. Рівняння параболи.
2. Рівняння параболоїда обертання.
3. Алгоритм переходу до канонічного рівняння параболоїда.
4. Чудова властивість параболоїда обертання

1. Рівняння параболи.

Параболою називається множина точок на площині, рівновіддалених від заданої точки, званої фокусом, і даної прямої, званої директрисою.

Фокус параболи прийнято позначати буквою F , директрису – буквою d , відстань від фокуса до директриси - буквою p ($p > 0$).

Розглянемо основні випадки розміщення параболи щодо осей координат. Канонічне рівняння параболи, фокус якої розташований на осі ординат, має вигляд: $x^2 = 2py$ або $x^2 = -2py$

Ці два випадки представлені в таблиці:

Положення фокуса	На додатній півосі ОУ	На від'ємній півосі ОУ
Координати фокуса	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Канонічне рівняння параболи	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

Приклад 1. Знайти канонічне рівняння параболи і рівняння її директриси, якщо відомо, що вершина параболи лежить на початку координат, а фокус має координати $(0; -3)$.

Розв'язок.

Згідно з умовою фокус параболи розташований на від'ємній півосі ОУ, тобто її рівняння має вигляд $x^2 = -2py$. Так як $-\frac{p}{2} = -3$, то $p = 6$, звідки рівняння

параболи є $x^2 = -12py$, а рівняння директриси $y = \frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Відповідь: $x^2 = -12py$; $y = 3$.

Приклад 2. Парабола з вершиною в початку координат симетрична осі ОУ і проходить через точку $A(-5;2)$. Скласти канонічне рівняння параболи.

Розв'язок

1) Оскільки точка $A(-5;2)$ знаходиться у другій чверті, то канонічне рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$.

2) Так як координати точки $A(-5;2)$ задовольняють рівнянню $x^2 = 2py$, то
 $(-5)^2 = 2p \cdot 2$; $25 = 4p$; $p = \frac{25}{4} = 6,25$

3) Отже, канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py = 2 \cdot 6,25y = 12,5y.$$

Відповідь: $x^2 = 12,5y$

2. Рівняння параболоїда обертання.

Поверхня, яка виходить обертанням параболи навколо її осі симетрії, називається параболоїдом обертання.

Розглянемо основні випадки.

Нехай на площині ХОУ парабола задана рівнянням $x^2 + z^2 = 2py, z = 0$.

Обертаючи параболу навколо її осі симетрії оу отримуємо параболоїд

обертання, канонічне рівняння якого має вигляд: $x^2 + z^2 = 2py$. Аналогічно,

якщо на площині ХОУ парабола задана рівнянням $x^2 = -2py, z = 0$, то канонічне рівняння параболоїда обертання має вигляд:

$$x^2 + z^2 = -2py.$$

Приклад. Показати, що поверхня, задана рівнянням $x^2 - 2x + z^2 + 4z - 14y + 5 = 0$ є параболоїдом обертання. Знайти координати вершини.

Розв'язок.

1) Згрупуємо змінні x, y, z

$$(x^2 - 2x) + (z^2 + 4z) - 14y + 5 = 0$$

2) Доповнимо до повних квадратів вираження в дужках.

$$(x^2 - 2x + 1) + (z^2 + 4z + 4) - 14y + 5 - 1 - 4 = 0$$

3) Запишемо канонічне рівняння параболоїда.

$$(x - 1)^2 + (z + 2)^2 = 14(y - 0)$$

$$\text{Відповідь : } C(1;0;-2); (x - 1)^2 + (z + 2)^2 = 14y$$

4. Чудова властивість параболоїда обертання.

Якщо внутрішню поверхню параболоїда обертання зробити дзеркальною, а в її фокусі (фокусом параболоїда обертання називається фокус параболи, яка обертається) помістити джерело світла, то всі промені світла, відбиваючись від поверхні параболоїда, підуть паралельно осі параболоїда.

Ця властивість широко використовується при виготовленні світловідбивних пристроїв (проекторів, фар автомобіля, кінопроекторів та інших приладів)

Форму параболоїда обертання має поверхня ртуті, що знаходиться у вертикальному циліндричному посуді, яка швидко обертається навколо своєї

осі. Цю обставину використовують у в техніці для отримання параболічних дзеркал.

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення параболі.
2. Запишіть канонічне рівняння парабол, симетричних щодо осі ординат.
3. Складіть рівняння параболі, фокус якої має координати (0; -2).
4. Складіть рівняння параболі, директриса якої задана рівнянням $4y + 6 = 0$.
5. Як отримати параболоїд обертання?
6. Запишіть канонічні рівняння параболоїдів обертання з віссю симетрії ou
7. Довести, що поверхня, яка задана рівнянням $x^2 + z^2 - 2x + 4z - 14y + 33 = 0$ є параболоїдом обертання
8. Яку чудову властивість параболоїда ви знаєте?