Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Границі і неперервність функції.

План лекції

1. Границі функції.

2.Неперервність функції.

3.Обчислення границь.

1. Границі функції.

Якщо при x , прагнучих до a , функція $f(x)$ прагне до b , то говорять , що границя функції $f(x)$ в точці $x = a$ дорівнює b і пишуть $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

В подальшому будемо припускати , що функція визначена в деякій околиці точки a.

У самій же точці a функція може бути не визначена.

Визначення. Число b називається границею функції *f(x)* в точці a, якщо для всіх значень x, досить близьких до a і відмінних від a, значення функції *f(x)* як завгодно мало відрізняються від числа b.

Наприклад, нехай задана функція $f(x) = x + 2$. Припустимо, що $x \to 1$. З'ясуємо, чи існує за цієї умови границя даної функції, і якщо існує, то знайдемо її значення.

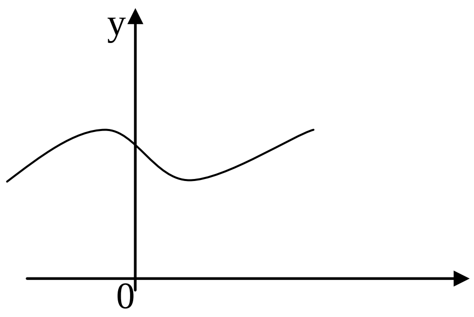
Маємо: $f(0.9) = 2.9; f(0.99) = 2.99; f(0.999) = 2.999; f(1.1) = 3.1; f(1.01) = 3.01; f(1.001) = 3.001$. Отримані результати показують, що при наближенні x до 1 значення функції наближаються до числа 3. Отже $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + +2) = 3$. Однак такий метод знаходження границі дуже громіздкий, тому на практиці він не застосовується. Спростити розв’язок задач на обчислення границь функцій дозволяють основні властивості границь:

1. $\lim(x + y + \cdots + t) = \lim x + \lim y + \cdots + \lim t$

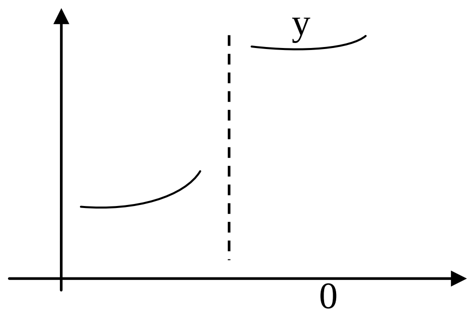
2. $\lim(x * y * \ldots * t) = \lim x * \lim y * \ldots * \lim t$
3. $\lim(cx) = \lim c * \lim x = c \lim x$
4. $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$, якщо $\lim y \neq 0$
5. $\lim x^n = (\lim x)^n$
6. Якщо $x \leq y \leq z$ та $x \to a, z \to a,$ то $y \to a$.

2. Неперервність функції.

Наочне уявлення про неперервної функції полягає в тому, що графік такої функції можна накреслити одним безперервним рухом, не відриваючи олівця від паперу. В іншому випадку має місце графічне зображення розривною функції. На малюнку 1 зображено деяка безперервна функція, а на малюнку 2 - розривна функція.



x



x_0 x

мал. 1 мал. 2

Визначення.

Функція *f(x)* називається безперервною в даній точці x_0, якщо її границя в точці x_0 існує і дорівнює значенню функції в цій точці, тобто якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Властивості неперервних функцій.</u>

Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці *a*, то:

1. Їх сума, різниця, добуток є функціями, безперервними в цій точці;

2. Частка $f_1(x)/f_2\,(x)$ є безперервна функція за умови $f_2(a) \neq 0$.

Визначення 2. Функція *f(x)* називається безперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього відрізку.
Значення аргументу, при якому функція не є безперервною, називається точкою розриву. На малюнку 2 зображений графік функції, що має точку розриву при $x = x_0$. Прикладом функції, що має точку розриву, є швидкість тіла, що падає на землю. Ця швидкість є безперервна функція часу, але в момент удару можна вважати, що вона миттєво падає до нуля, тобто функція швидкості терпить розрив.

Якщо функція неперервна, то при відшуканні її границі можна замість аргументу підставити його граничне значення.
Надалі ми будемо користуватися цим прийомом, тому що він значно спрощує обчислення границь функції.

Приклад. Обчислити $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+4x-3}{x+4}$

Розв'язок

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4} = \frac{2*1^3+4*1-3}{1+4} = \frac{3}{5}$$

3.Обчислення границь .

Зазначене вище правило обчислення границь не можна застосовувати в наступних випадках:

1. якщо функція при *x* = *a* не визначена;
2. якщо знаменник дробу при підстановці *x* = *a* виявляється рівним нулю;
3. якщо чисельник і знаменник дробу при підстановці *x* = *a* одночасно виявляються рівними нулю або нескінченності.

У таких випадках границі функцій знаходять за допомогою різних штучних прийомів.

Приклад 1. Знайти

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{3-x}$

Розв'язок

Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{3-x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{3-x} = \lim_{x\to 3}(-\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}) =$$

$$= \lim_{x\to 3}\big(-(x+3)\big) = -(3+3) = 6$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{x^3-1}$

Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$

Розділимо чисельник і знаменник на x^3 (найвищий ступінь x в даній дробі):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = 2, \text{так як } \frac{1}{x^2} \text{ та } \frac{1}{x^3} \text{ при } x\to\infty \text{ прагнуть до } 0.$$

Чудові границі.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} (1+\frac{1}{x})^x = e \approx 2{,}7182 \dots$

Приклад 1. Знайти $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$

Розв'язок

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin 2\alpha}{2\alpha} = 2*\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 2*1 = 2$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Розв'язок

Розділивши чисельник і знаменник на x, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{e}$$

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення границі функції в точці a.
2. Перелічіть основні властивості границь.
3. Дайте визначення неперервної функції в точці x_0.
4. Перерахуйте властивості неперервних функцій.
5. Дайте визначення неперервної функції на відрізку $[a,b]$.
6. Що називається точкою розриву функції.
7. Сформулюйте правило обчислення границь функції. Коли не можна його застосовувати?
8. Наведіть приклади штучних прийомів знаходження границі функції.
9. Які чудові границі ви знаєте? Наведіть приклади їх використання.