Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Диференціальне числення функції однієї змінної.

План лекції

1. Таблиця правил та формул диференціювання.
2. Геометричне та механічне значення похідної.
3. Диференціал функції однієї змінної.

1. Таблиця правил та формул диференціювання.

При вивченні тих чи інших процесів і явищ часто виникає задача визначення швидкості цих процесів. Її розв'язування, яке призводить до поняття похідної є основним поняттям диференційного числення.

Метод диференційного числення був створений у 17 і 18 століттях. З виникненням цього методу пов'язані імена двох великих математиків – І. Ньютона і Г. В. Лейбніца.

Операцію відшукання похідної деякої функції називають диференціюванням функції, а розділ математики, що вивчає властивості цієї операції, - диференційним численням.
Перш ніж використовувати правила і формули диференціювання, зведемо їх у таблицю і надалі будемо користуватися нею, подібно до того як в арифметиці користуються таблицею множення.

Правила диференціювання:

1. $C' = 0$, де С – постійна.

2. $x' = 1$

3. $(U + V - W)' = U' + V' - W'$

4. $(UV)' = U'V + V'U$

5. $(CU)' = CU'$, де С – постійна.

6. $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

7. $y'_x = y'_u * u'_x$

Формули диференціювання:

8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $(\log_a x) = \frac{1}{x*lna}$

10. $(x^n)' = nx^{n-1}$

11. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

12. $(a^x)' = a^x * lna$

$(e^x)' = e^x$

13. $(\sin x)' = \cos x$

14. $(\cos x)' = -\sin x$

15. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

16. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

20. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Складна функція - це функція від функції. Говорячи про складну функцію, мають на увазі, що така функція складена з декількох функцій, а не якусь її особливу складність.

При диференціюванні складних функцій зручно ввести коефіцієнт складності, який вказує кількість простих функцій, що входять в дану складну функцію. Наприклад, для функції y = cos 5x коефіцієнт складності дорівнює 2, оскільки в неї входять дві прості функції y = cos u і u = 5x. Для функції $\sin^2 3x$ коефіцієнт складності дорівнює 3, так як простими функціями є $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x$.

Приклад 1. Знайти похідну функції:

$y = (x^2 + 3x)^5$

Розв'язок

Коефіцієнт складності дорівнює 2

$$y'_x = 5(x^2 + 3x)^4 * (2x + 3)$$

Приклад 2. Знайти похідну функції:

$y = \sin^2 4x$

Розв'язок

Коефіцієнт складності дорівнює 3.

$$y'_x = 2\sin 4x * \cos 4x * 4 = 4\sin 8x$$

Надалі, коли в практиці диференціювання накопичиться достатній досвід, можна обходитися без проміжних записів.

2. Геометричне та механічне значення похідної.

Геометрична інтерпретація похідної вперше дана в кінці 17 століття Лейбніцем і полягає в наступному: значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції в тій же точці x, тобто

$$k = f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$$

Приклад 1. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої

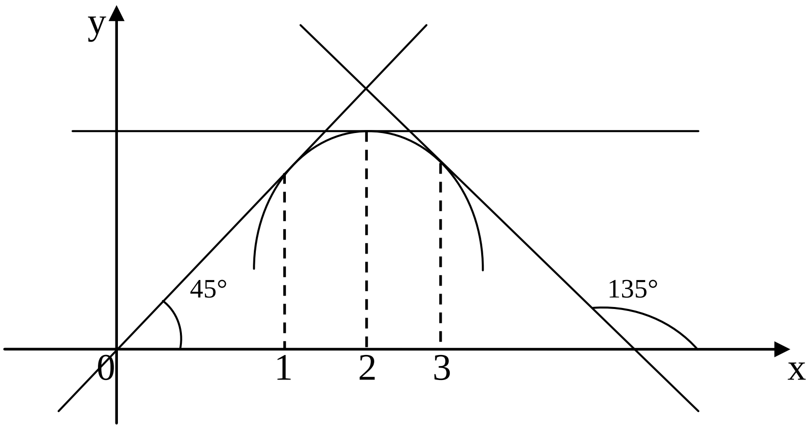
$y = x^3$ у точці C(-2;-8).

Розв'язок

$$y' = (x^3)' = 3x^2; \qquad y'(-2) = 3 * (-2)^2 = 12.$$

Геометричний зміст похідної дає наочне уявлення про похідну, дозволяє простежити за її зміною при русі точки по кривій дає можливість геометрично визначити значення похідної при даному значенні х.

Приклад 2. По графіку функції зображеному на малюнку знайти $f'(1), f'(2)$ і $f'(3)$.



Розв’язок

1. Так як кут нахилу дотичної в точці з абсцисою

х = 1 дорівнює 45°, то $f'(1) = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$

2. Так як кут нахилу дотичної в точці з абсцисою

х = 2 дорівнює 0°, то $f'(2) = \operatorname{tg} 0^{\circ} = 0$

3. Так як кут нахилу дотичної в точці з абсцисою

х = 3 дорівнює 135°, то $f'(3) = \operatorname{tg} 135^{\circ} = -1$.

Механічне тлумачення похідної було вперше дано І. Ньютоном. Воно полягає в наступному: швидкість руху матеріальної точки в даний момент часу дорівнює похідній шляху по часу, тобто

$$\mathrm{V} = \mathrm{S}'(\mathrm{t})$$

Таким чином, якщо закон руху матеріальної точки задано рівнянням $S = f(t)$, то для знаходження миттєвої швидкості точки в який-небудь певний момент часу потрібно знайти похідну $S'(t) = f'(t)$ і підставити в неї відповідне значення t. Для визначеності будемо вважати, що шлях вимірюється в метрах, а час - у секундах.

Приклад 1. Шлях, пройдений матеріальною точкою, задається формулою: $S = 3t^2 - 2t + 4$.

Знайти швидкість руху точки у кінці 5 – ої секунди.

Розв'язок

1) $V(t) = S'(t) = 6t - 2$;   2) $V(5) = 6 * 5 - 2 = 28 \, {}^{м}/_{с}$

Прискорення прямолінійного руху тіла в даний момент дорівнює другої похідної шляху по часу, обчисленої для даного моменту. У цьому і полягає механічний сенс другої похідної.

Приклад 3. Точка рухається прямолінійно за законом

$$S(t) = 3t^2 - 3t + 8.$$

Знайти швидкість та прискорення точки в момент t = 4

Розв'язок

1) $V(t) = S'(t) = 6t - 3$

2) $V(4) = 6 * 4 - 3 = 21 \, ({}^{м}/_{с})$

3) $a = V' = (6t - 3)' = 6 \, ({}^{м}/_{с^2})$

3. <u>Диференціал функції однієї змінної.</u>

Знаходження диференціала функції y = f(x), так само як і знаходження похідної, є однією з основних задач диференційного числення. Диференціал функції геометрично зображується прирощенням ординати дотичної, проведеної в точці M(x,y) при даних значеннях x і Δx.

Приклад 1. Використовуючи поняттям диференціала функції, обчислити наближено змінення функції $y = x^3 - 7x^2 + 80$ при зміні аргументу x від 5 до 5,01

Розв'язок

1) $\Delta y \approx dy = y' * \Delta x = (3x^2 - 14x) * \Delta x$

2) При x = 5, $\Delta x = 5{,}01 - 5 = 0{,}01$ отримаємо

$$\Delta y = (3 * 5^2 - 14 * 5) * 0{,}01 = 0{,}05$$

За допомогою диференціалу можна:

- наближено обчислити приріст функції;
- обчислити похибки наближеного приросту функції;
- обчислити приріст функції з заданою точністю;
- встановити помилку в обчисленнях;
- знайти наближене значення функції.

Закріплення нового матеріалу.

1. Перерахуйте основні правила і формули диференціювання.
2. Дайте поняття складної функції.
3. Сформулюйте геометричне тлумачення похідної.
4. Сформулюйте механічне тлумачення похідної.
5. Які завдання можна вирішити за допомогою диференціала?