Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Основні теореми диференціального числення.

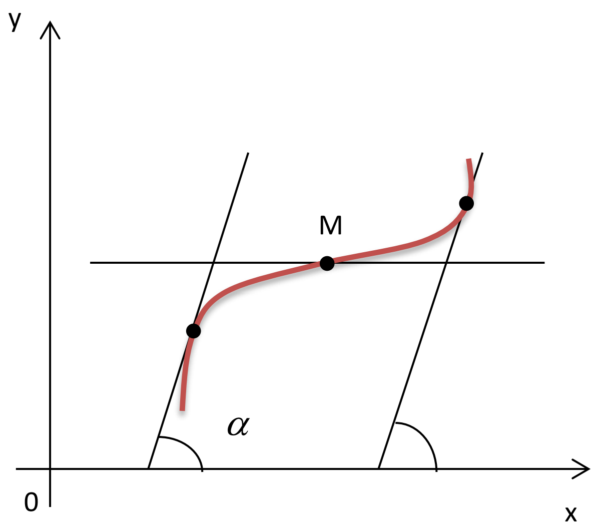
План лекції

1. Зростання і спадання функцій.
2. Дослідження функцій на екстремум за допомогою похідної.

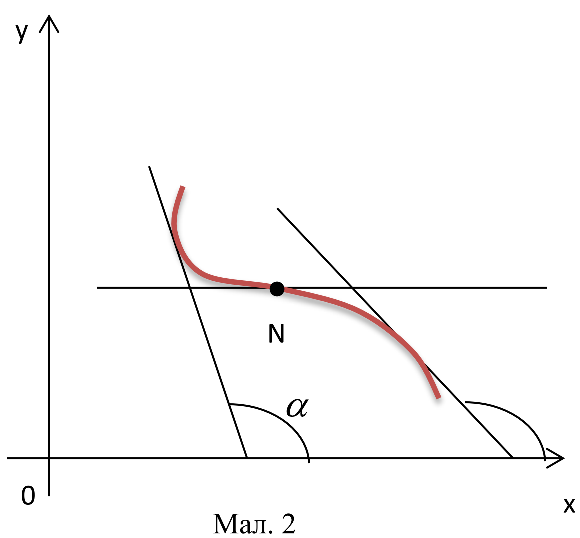
1. Зростання і спадання функцій.

Визначення. Функція $y=f(x)$ називається зростаючою у деякому інтервалі, якщо у точках цього інтервалу більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і спадаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Теорема 1. *Якщо функція* $y=f(x)$, що диференціюється, зростає (спадає) у даному інтервалі, то похідна цієї функції не від′ємна (не додатна) у цьому інтервалі.
Геометричне затвердження теореми означає, що дотична до графіку зростаючої функції утворює гострі кути з дотичним вісі *Ox* або, може бути, в окремих точках, на зразок точки *M* (мал. 1), дотична паралельна вісі *Ox* ; значить, $f'(x)=tg\alpha \geq 0$.
Аналогічно, дотичні до графіку спадаючої функції утворюють тупі кути з додатним напрямком вісі *Ox* або, може бути, в окремих точках, на зразок *N* (мал. 2), дотична паралельна вісі *Ox* ; тому $f'(x)=tg\alpha \leq 0$.



Мал. 1



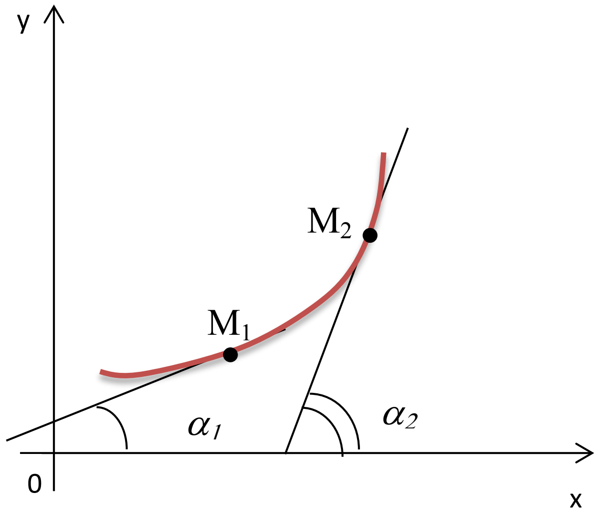
Мал. 2

Інтервали, на яких функція тільки зростає або тільки спадає, називається інтервалом монотонності функції, а сама функція називається монотонною на цих інтервалах.

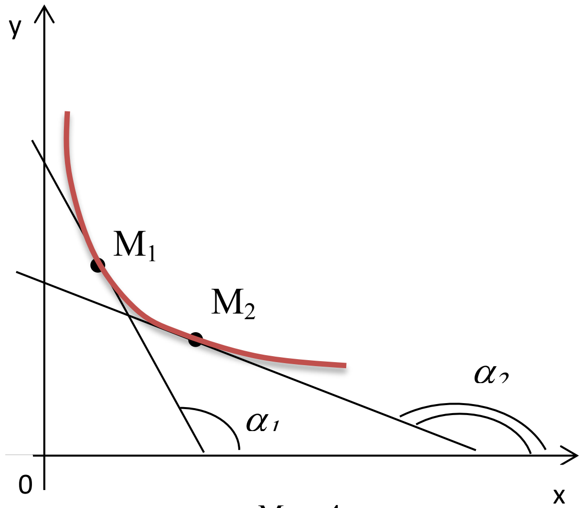
Теорема 2. Якщо похідна функції $y=f(x)$ додатна (від′ємна) у деякому інтервалі, то функція у цьому інтервалі монотонно зростає (спадає).

Пояснимо цю теорему геометрично. Маємо $f'(x)=k=tg\alpha$. Якщо $f'(x)>0$, то $tg\alpha>0$, тобто кут α - гострий, а це можливо тільки при зростаючій функції (мал. 3). Якщо $f'(x)<0$, то $tg\alpha<0$, тобто кут α - тупий, а це можливо тільки при спадаючій функції (мал. 4).

Таким чином, зростання або спадання (монотонність) функції на інтервалі визначається знаком похідної цієї функції.



Мал. 3



Мал. 4

Приклад. Показати, що функція

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ спадає у інтервалі (-2;1).

Розв’язок

Достатньо переконатися у тому, що похідна функції при $-2 < x < 1$ від′ємна.

Знаходимо $y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

Множник $x+2$ на інтервалі (-2; 1) додатний, а множник $x-1$ від′ємний. Значить похідна в усіх точках вказаного інтервалу від′ємна, а, отже, функція спадає.

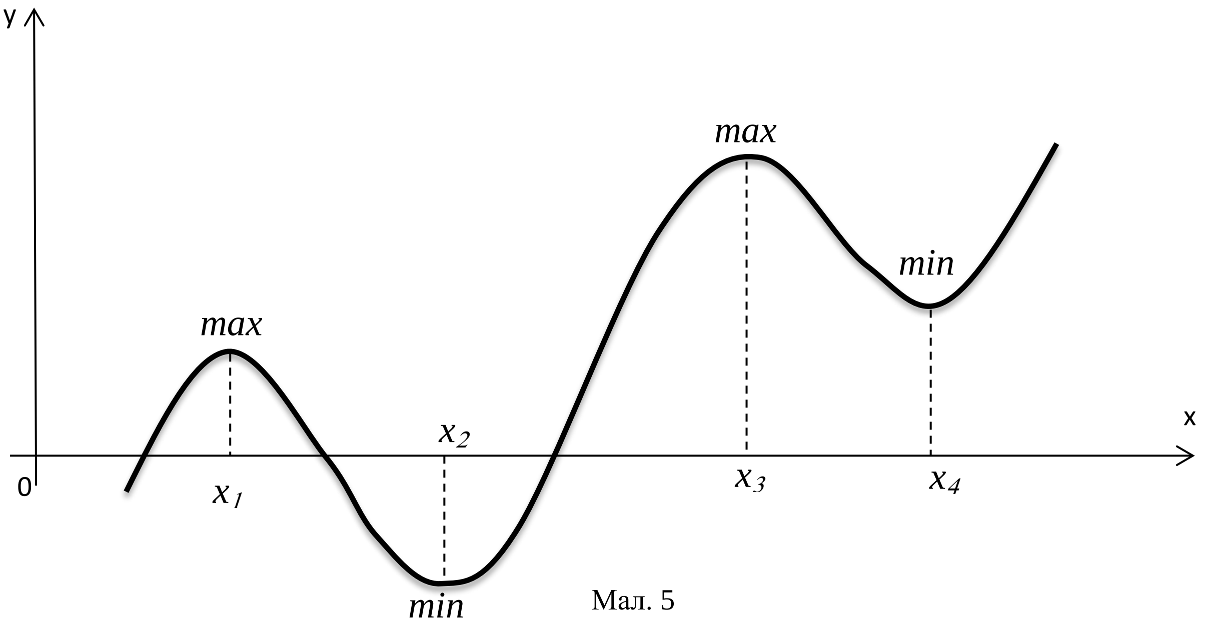
2. Дослідження функцій на екстремум за допомогою похідної.

Визначення. Точка *x=a* називається точкою максимуму (мінімуму) функції *f(x),* якщо має місце нерівність *f(a)>f(x)* (відповідно *f(a)<f(x)*) для будь-якого *x* з деякого околу точки *x=a.*

Якщо *x=a* - точка максимуму (мінімуму) функції *f(x),* то кажуть, що *f(x)* має максимум (мінімум) у точці *x=a.*

Максимум та мінімум функції називають екстремумом функції, а точки максимуму та мінімуму називають точками екстремуму (екстремальними точками).

На даному інтервалі функція може мати декілька максимумів та мінімумів (мал. 5)

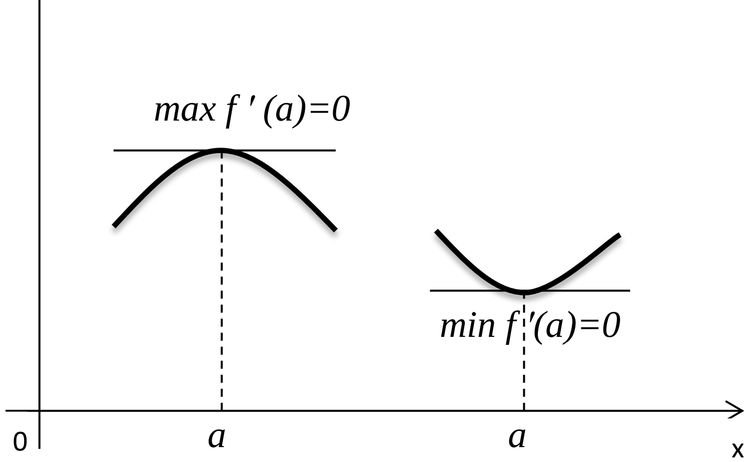


Мал. 5

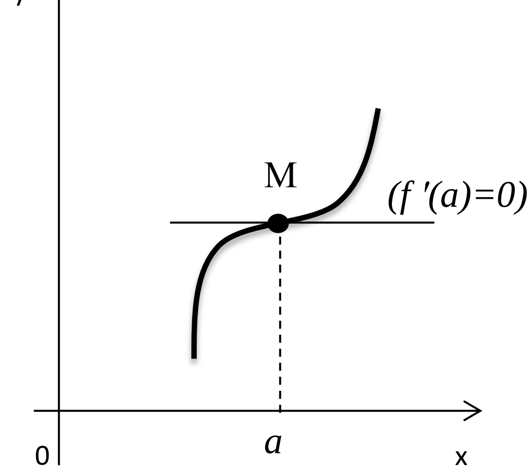
Теорема 3 (необхідна ознака екстремуму).

Якщо *x=a* є точкою екстремуму функції *y=f(x)*, то дотична до графіку цієї функції у точці *(a ; f(a))* паралельна вісі Ox (мал. 6).

Легко переконатися у тому, що необхідна ознака екстремуму функції не є достатнім (мал. 7).

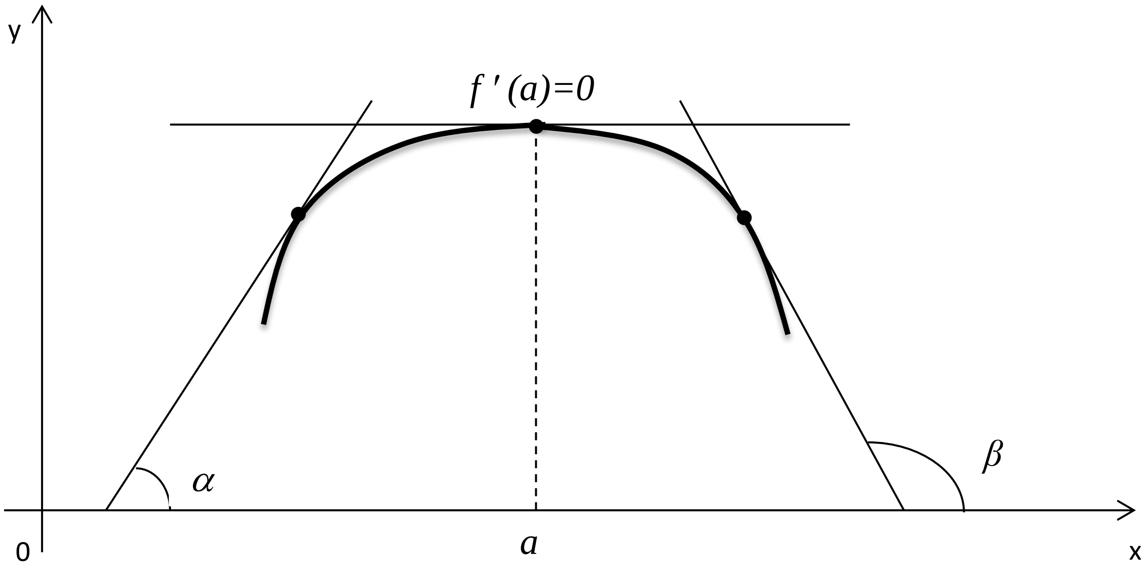


Мал. 6



Мал. 7

Теорема 4 (достатня ознака екстремуму).
Якщо похідна $f'(x)$ при переході x через a змінює знак, то a є точкою екстремуму функції $f(x)$.
Зміст теореми наочно демонструє мал. 8. Точка a – критична, бо $f'(x)=0$. Зліва від цієї точки, тобто при $x<a$, маємо $f'(x)>0$; дотична до кривої утворює з віссю Ох гострий кут та функція зростає.
Праворуч від цієї точки, тобто при $x>a$, маємо $f'(x)<0$; дотична до кривої утворює з віссю Ох тупий кут та функція спадає. При $x=a$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.
Таким чином, дослідження похідної $y'=f'(x)$ дозволяє багато в чому вивчати поведінку функції $y=f(x)$.



Мал. 8

Приклад. Дослідити на екстремум функцію.

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$$

Розв’язок.

1.Знаходимо похідну

$y'=x^2-4x+3$

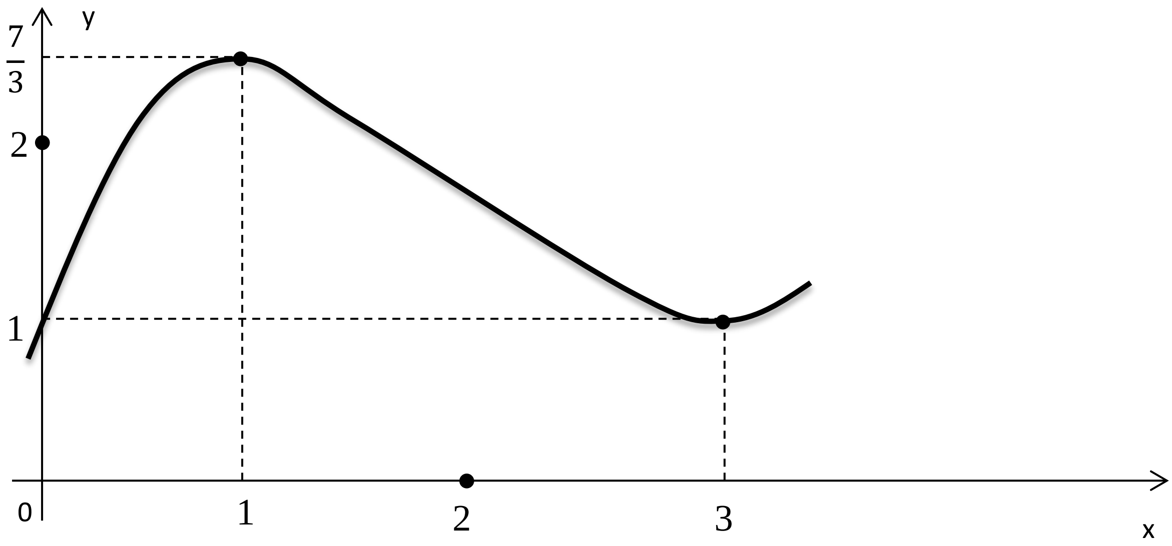
2.Дорівнюємо її до нулю та розв'язуємо рівняння $x^2-4x+3=0$. Його корні $x_1=1$, $x_2=3$ – критичні точки.

3.Якщо $y'(x<1)>0$, $y'(x>1)<0$, то при $x_1=1$ функція має максимум.

4.Аналогічно, для точки $x_2=3$ отримаємо $y'(x<3)<0$, $y'(x>3)>0$. Отже, при $x_2=3$ функція досягає мінімуму.

5.Знаходимо $y(1)=\frac{7}{3}$; $y(3)=1$

Графік функції зображений на мал. 9.



Мал. 9

Закріплення нового матеріалу.

1.Дайте визначення зростаючої та спадаючої функції.

2.Дайте визначення монотонної функції на інтервалах.

3.Дайте визначення екстремальних точок і визначення екстремуму функції.

4.Сформулюйте основні теореми на зростання і спадання функцій.

5.Сформулюйте основні теореми, що використовуються при дослідженні функції на екстремум.

6.Дайте визначення точки максимуму та точки мінімуму функції *f(x).*

7.Дайте визначення максимуму та мінімуму функції *f(x).*