Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Невизначений інтеграл.

План лекції.

1. Первісна.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Основні табличні інтеграли.

1.Первісна.

Первісною називають функцію, яку відновлюють по заданій її похідній або диференціалу.

Визначення. Функція $F(x)$ яка диференціюється, називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку справедливо рівняння:

$$F'(x)=f(x)$$

З цього визначення витікає, що кожна функція по відношенню до своєї похідної є первісною.

Так, функція $F(x)=x^2$ є первісною функції $f(x)=2x$ на інтервалі $(-\infty;\infty)$, оскільки для всіх $x \in R$ має місце рівність $F'(x)=(x^2)'=2x$.

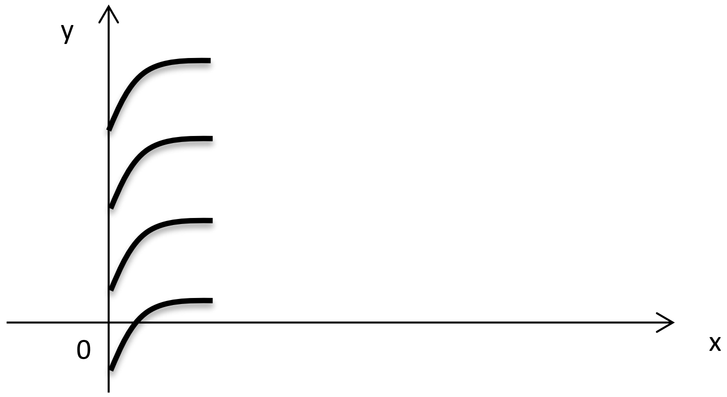
Теорема. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку то множина усіх первісних цієї функції має вид $F(x)+C$, де C - будь яке дійсне число.

Доведення.

Нехай $F'(x)=f(x)$. Тоді $(F(x)+C)'= F'(x)+C'= F'(x)=f(x)$.

Покажемо тепер, що усі первісні функції $f(x)$ відрізняються лише постійним доданком. Нехай $\varphi(x)$ - інша первісна функції $f(x)$ на проміжку, який розглядається, тобто $\varphi'(x)=f(x)$. Тоді $(\varphi(x)-F(x))'=\varphi'(x)-F'(x)=f(x)- f(x)=0$ при всіх x з проміжку, який розглядається. Отже, $\varphi(x)-F'(x)=C$, що і вимагалося встановити. Таким чином, кожні дві первісні даної функції відрізняються одна від одної на постійний доданок, а вираз $F(x)+C$ вичерпує множину усіх первісних заданої функції $f(x)$. Отже, задача знаходження первісної неоднозначна. Вона має нескінчену множину розв'язок.

Геометричне вираження $F(x)+C$ представляє собою сім'ю кривих, отриманих з будь якої з них паралельним переносом упродовж вісі Oy.



2.Невизначений інтеграл та його властивості.

Визначення. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ функції $f(x)$ на проміжку, який розглядається називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)dx$, де $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F(x)$ - якась первісна функції $f(x)$ на деякому проміжку, то $\int f(x)dx=F(x)+c$ де C - будь яке дійсне число.

Зауваження. Наявність постійної C робить задачу знаходження функції по її похідній не достатньо визначеною; звідси походить і сама назва «невизначений інтеграл».

Так, користуючись визначенням невизначеного інтегралу, можна записати:

$\int 2xdx =x^2+C;$ $\int cosxdx=sinx+C$ *і т.д.*

Значить, щоб знайти невизначений інтеграл від заданої функції, треба знайти якусь одну її первісну і додати до неї довільну постійну C.

Слово «інтеграл» походить від латинського слова *integer*, що означає «відновлений». Інтегруючи будь яку функцію, наприклад $4x^3$, ми як би відновлюємо функцію x^4, похідна якої дорівнює $4x^3$.

Щоб перевірити, чи вірно знайдений невизначений інтеграл, необхідно продиференціювати отриману функцію; якщо при цьому отримаємо підінтегральний вираз, то інтеграл знайдений вірно.

Наприклад, $y=\int(3x^2+2)dx=x^3+2x+C$. Зробимо перевірку: $y'=(x^3+2x+C)'=3x^2+2$. Отже, інтеграл знайдений вірно.

Розглянемо основні властивості невизначеного інтегралу.

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$

2) $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, де $m\text{-}const \neq 0$

3) $\int (f(x) \pm \phi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \phi(x)dx$

3.Основні табличні інтеграли.

З визначення інтегралу випливає, що для того щоб проінтегрувати функцію, треба знайти її первісну. Для ряду функцій це легко зробити, використовуючи відповідну формулу диференціювання.

Наприклад, ми знаємо, що $sin'x = cosx$; звідси витікає, що $\int cosxdx = sinx + C$.

Отже, формули інтегрування отримуємо перетворенням (оберненням) відповідних формул диференціювання. Випишемо в таблицю основні інтеграли.

1. $\int x^n nx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ при $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$, де $e \approx 2,72$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$
5. $\int sindx = -cosx + c$
6. $\int cosxdx = sinx + c$
7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$
8. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + c$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

Інтеграли надані у цій таблиці називаються табличними інтегралами. Обчислення інтегралів засобом зведення їх до табличних називається безпосереднім інтегруванням. При цьому корисно запам'ятати, що $\int dx = x + c$ (формула 1 при $n=0$).

Приклад 1. Знайти функцію похідна, якої дорівнює $3t^2-2t+1$, якщо відомо, що при $t=2$ функція приймає значення, рівне 25.

Розв′язок.

1) $\int(3t^2-2t+1)dt=t^3-t^2+t+c$

2) $2^3-2^2+2+c=25$, звідки $c=19$

Відповідь: $y=t^3-t^2+t+19$.

Приклад 2. Швидкість тіла задана рівнянням $V(t)=6t^2+1$. Знайти рівняння руху, якщо за час $t=3$ сек. тіло пройшло шлях $S=60$ м.

Розв′язок.

1) $S=\int(6t^2+1)dt=2t^3+t+c$

2) $60=2\times3^3+3+c$, звідки $c=3$

Відповідь $S=2t^3+t+3$.

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення первісної.
2. Сформулюйте теорему про первісну.
3. Дайте геометричну інтерпретацію сукупності усіх первісних $F(x)+C$ функції $f(x)$.
4. Дайте визначення невизначеного інтегралу.
5. Як перевірити, чи вірно знайдений невизначений інтеграл?
6. Перерахуйте основні властивості невизначеного інтегралу.
7. Які основні табличні інтеграли ви знаєте?