Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Інтегрування підстановкою і по частинах.

План лекції:

1. Інтегрування способом підстановки.
2. Інтегрування по частинах.

1.Інтегрування способом підстановки.

Якщо заданий інтеграл за допомогою алгебраїчних перетворень важко або неможливо звести до одного чи кількох табличним інтегралом, то для його відшукання застосовують особливі способи, одним з яких є спосіб підстановки (заміни змінної).

Спосіб підстановки полягає в наступному: заміняють нової змінної таку частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої вийде решта підінтегральна вирази.

Наприклад, в інтегралі $\int \sin x \cos x \, dx$ зручно зробити заміну $t = \sin x$, так як решта подинтегральної вирази дорівнює $\cos x \, dx = dt(\frac{dt}{dx} = \sin^{\prime} x = \cos x; dt = \cos x dx)$. Тоді перепишемо даний інтеграл у вигляді $\int \sin x \cos x \, dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c$.

Далі, зробивши зворотну заміну $t = \sin x$, отримаємо відповідь: $\frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$.

Рішення цього прикладу можна коротко оформити так: $\int \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} t=\sin x; \frac{dt}{dx}=\cos x; \\ dt=\cos x dx \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$.

Відповідь: $\frac{1}{2} \sin^2 x + c$.

Приклад 2. Знайти $\int \sin x dx$

Розв'язок

$$\int \sin x dx = \left| \begin{matrix} t=nx\,; \frac{dt}{dx}=n\,; \\ dt=ndx\,; dx=\frac{dt}{n} \end{matrix} \right| = \int \frac{\sin t dt}{n} = \frac{1}{n} \sin t dt = -\frac{1}{n} \cos t + c = -\frac{1}{n} \cos nx + c.$$

Відповідь: $\int \sin x dx = -\frac{1}{n}\cos nx + c$. (1)

Приклад 3. Знайти $\int \cos x dx$

Розв’язок

$$\int \cos x dx = \left| \begin{matrix} t=nx\,;\frac{dt}{dx}=n\,; \\ dt=ndx\,;dx=\frac{dt}{n} \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos tdt}{n} = \frac{1}{n}\cos tdt = \frac{1}{n}\sin t + c = \frac{1}{n}\sin nx + c.$$

Відповідь: $\int \cos x dx = \frac{1}{n}\sin nx + c$. (2)

Формули (1) і (2) корисно запам'ятати і користуватися ними як табличними інтегралами.

Приклад 4. Знайти $\int (2x+3)^2 dx$

Розв'язок

$$\int (2x+3)^2 dx = \left| \begin{matrix} t=2x+3\,;\frac{dt}{dx}=(2x+3)^{\prime}=2\,; \\ dt=2dx\,;dx=\frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^4 dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^4 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} + c = \frac{t^5}{10} + c = \frac{(2x+3)^5}{10} + c.$$

Приклад 5. Знайти $\int \sqrt{x+1}\, dx$

Розв’язок

$$\int \sqrt{x+1}\, dx = \left| \begin{matrix} t=x+1\,;\frac{dt}{dx}=(x+1)^{\prime}=1\,; \\ dt=dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+1)^3} + c = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c$.

Приклад 6. Знайти $\int x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$.

Розв'язок

$$\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 1 + x^3;\ \dfrac{dt}{dx} = (x+1)' = 3x^2\ ; \\ dt = 3x^2dx;\ x^2dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t}\cdot dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\sqrt{t^3} + c = \frac{2}{9}t\sqrt{t} + c$$

$$= \frac{2}{9}(1+x^3)\cdot\sqrt{1+x^3} + c$$

Відповідь: $\frac{2}{9}(1+x^3)\cdot\sqrt{1+x^3} + c$.

2.Інтегрування по частинах.

При інтегруванні функцій, що містять добутки, логарифми і зворотні тригонометричні функції, буває зручно скористатися способом інтегрування по частинах.

Виведемо формулу інтегрування частинами.

Інтегріруя обидві частини рівності $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$, отримаємо

$u\upsilon = \int u'\upsilon dx + \int \upsilon' u dx$ звідки $\int u\upsilon'\,dx = u\upsilon - \int u\upsilon'\,dx$ (3)

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x\cos x\,dx$ за допомогою формули (3).

Розв'язок

Враховуючи, що $(\sin x)' = \cos x$, маємо:

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,(\sin x)'dx = \left| \begin{array}{c} u = x;\ \upsilon = \sin x\,; \\ u' = 1 \end{array} \right|$$

$$= x\cdot\sin x - \int 1 - \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

Відповідь: $x\sin x + \cos x + c$.

Приклад 2. Знайти $\int x\cdot e^x dx$

Розв'язок

$$\int x\cdot e^x dx = \int x\,(e^x)' = \left| \begin{array}{c} u=x;\ u'=1 \\ \upsilon=e^x \end{array} \right| = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + c$$

Відповідь: $xe^x - e^x + c$.

Приклад 3. Знайти $\int x^5 \cdot \ln x\, dx$

Розв'язок

$$\int x^5 \cdot \ln x\, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)^{|} \cdot \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ u^{|} = \dfrac{1}{x} \\ \upsilon = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$.

Приклад 4. Знайти $\int (x^4 + 6x - 7) \cdot \ln x\, dx$.

Розв'язок

$$\int (x^4 + 6x - 7) \cdot \ln x\, dx = \int \ln x \cdot (x^4 + 3x^2 - 7)^{|} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x;\ u^{|} = \dfrac{1}{x}; \\ \upsilon = x^4 + 3x^2 - 7 \end{matrix} \right|$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot (x^4 + 3x^2 - 7) dx$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7) \cdot \ln x - \int (x^3 + 3x - 7)\, dx$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7) \cdot \ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x\right) + c$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7) \cdot \ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + c$$

Відповідь: $(x^4 + 3x^2 - 7) \cdot \ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + c$.

Уміння визначити доцільність тієї чи іншої заміни приходить з придбанням навику.

Закріплення нового матеріалу.

1. Коли застосовують спосіб підстановки?
2. У чому полягає спосіб підстановки?
3. Які формули корисно запам'ятати і користуватися ними як табличними інтегралами?
4. Знайдіть усно: а) $\int \sin 3x\, dx$; б) $\int \cos 4x\, dx$.
5. Коли зручно користуватися способом інтегрування по частинах?
6. Виведіть формулу інтегрування по частинах.
7. Знайти $\int x \sin x\, dx$ способом інтегрування по частинах.