**Модуль 2 Диференціальне та інтегральне числення.**

**Лекція Поняття функції багатьох змінних.**

**План лекції.**

1. Приклади функції багатьох змінних.
2. Геометричне зображення функцій.
3. Диференційованість функції багатьох змінних.

1. **Приклади функцій багатьох змінних.**

У багатьох питаннях геометрії, природознавства і т.д. доводиться мати справу з функціями двох, трьох і більше змінних.

**Приклад 1**. Площа прямокутника, сторони якого рівні $x$ та $y$, виражається формулою $S=x\cdot y$ . Очевидно,що $S$ є функція двох аргументів $x$ та $y$, визначена в області $x>0$, $y>0$.

Інакше,$S(x;\ y)=xy$.

**Приклад 2**. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з розмірами x,y,z виражається формулою V=xyz. Очевидно, V є функція трьох аргументів x,y,z, визначена в області $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Будь-яка функція від кількох змінних стає функцією від меншого числа змінних, якщо частина змінних зафіксувати, тобто додати постійні значення.

Наприклад, нехай ми маємо функцію

$V(x,y,z)= x\cdot y\cdot z$

Якщо припустити, що z - const (наприклад, z=10), то ми отримаємо функцію від двох змінних x та y: $V(x,y)=10xy$ .Далі, припускаючи, що і y=const (наприклад, y=8), отримаємо функцію від однієї змінної x: V(x)=80x.

Таким чином, у різних питаннях, за бажанням, функцію V можна розглядати як функцію однієї, двох або трьох змінних.

2. **Геометричне зображення функцій**.

Геометричним зображенням функції однієї змінної є лінія на площині.

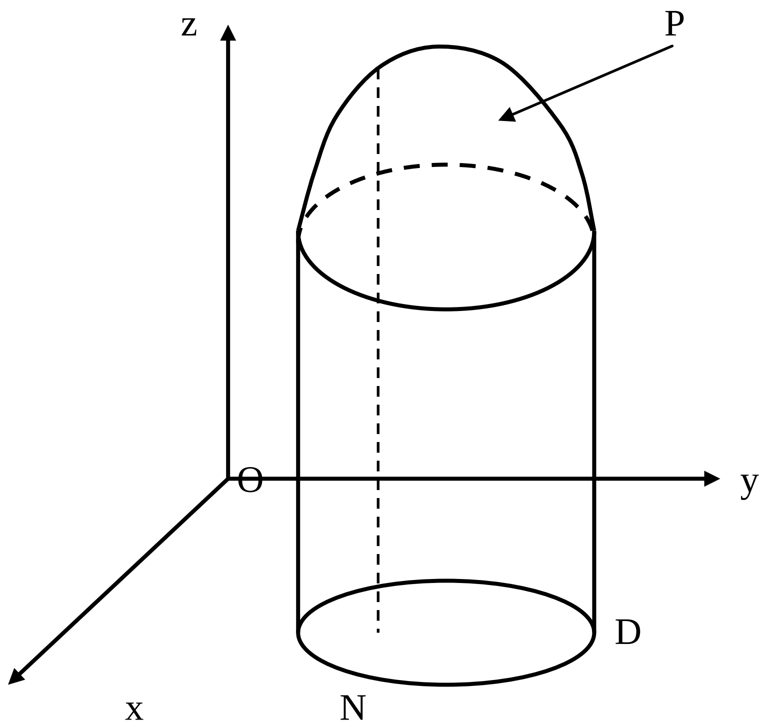
Наприклад, y=x (пряма), $y=x^2$ (парабола), $y=x^3$ (кубічна парабола), $y=\sin x$ (синусоїда) і т.д.

Геометричним зображенням функції двох змінних z=f(x,y) є поверхня в просторі.

Справді, нехай дана функція z=f(x,y) визначена в деякій області D. Тоді кожній точці N ставиться у відповідність точка M, належна графіку функції z=f(x,y).

Якщо точка N займає всілякі положення з області D, то пов'язана з нею точка M опише в просторі деяку поверхню P, "нависаючу" над областю D. Наочно можна уявляти собі, що P є "дах", побудований над площадкою D .

Поверхня P - це геометричне зображення функції z=f(x,y). Не можна геометрично зобразити функції трьох і більшого числа змінних, тому що ми живемо в тривимірному просторі.




3. **Диференційованість функції багатьох змінних**.

Якщо від функції z=f(x,y) береться частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$, то y вважається постійним, якщо ж знаходиться $\frac{\partial z}{\partial y}$, то x вважається const.

Частинне диференціювання не вимагає ніяких нових правил диференціювання, і ми можемо користуватися відомими формулами.

**Приклад**. Нехай $z = x^3 + y^4 + 5y - 3$

Легко бачити, що $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 5$

Для функції декількох змінних можна знаходити не лише частинні похідні вищого порядку.

Наприклад, для функції z=f(x,y) маємо такі типи похідних другого порядку:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Останні дві частинні похідні називаються змішаними частинними похідними.

**Теорема (без доведення)**

Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то змішані похідні одного і того-ж порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

Зокрема, якщо другі похідні неперервні, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

**Приклад**. Обчислити частинні частинні похідні першого порядку функції

$z = x^4 + x^3y^2 + y^5 + 5$

**Розв'язок**

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 3x^2y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 6xy^2$ ;

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 5y^4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 20y^3$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y$ .

**Закріплення нового матеріалу.**

1. Наведіть приклади функції однієї змінної.

2. Наведіть приклади функцій двох і трьох змінних.

3. Коли функція багатьох змінних стає функцією від меншого числа змінних?

4. Чи можна геометрично зобразити функцію однієї і двох змінних?

5. Чи можна геометрично зобразити функцію трьох змінних?

6. Чи вимагає частинне диференціювання нових правил диференціювання?

7. Сформулювати теорему о змішаних частинних похідних.

8. Для функції $z=f(x,y)$ запишіть всі типи похідних першого і другого порядків.