Модуль 2 Диференціальне та інтегральне числення

Лекція Дослідження функції багатьох змінних.

План лекції.

1. Екстремум функції.
2. Умовний екстремум функції.

1. Екстремум функції.

Максимум або мінімум функції називається її екстремумом.

Правило визначення екстремуму функції двох незалежних змінних $z = f(x, y)$.

1) Визначити стаціонарні точки, в яких функція може досягати екстремуму, для чого треба розв'язати систему рівнянь: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
2) Визначити другі частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$
3) Обчислити значення других частинних похідних в кожній стаціонарній точці, а отримані числа позначити відповідно через A, B і C.
4) Скласти вираз $\Delta = AC - B^2$. При цьому,
   а) якщо $\Delta>0$, то екстремум в стаціонарній точці є: якщо A>0, то буде мінімум, а при A<0- максимум;
   б) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в даній стаціонарній точці немає;
   в) якщо $\Delta=0$, то має місце сумнівний випадок, і для висновку про екстремуму треба залучити до розгляду частинні похідні порядка вище другого (цей випадок в програму не входить і нами не розглядається).
   Приклад. Дослідити на екстремум функцію.

   $$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

   Розв'язок.
   1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x;$

   Розв'яжемо систему.
   $$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0 \\ 6y^2 - 36x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{6} \\ \dfrac{x^4}{36} - 6x = 0 \end{cases}; \quad x^4 - 216x = 0;$$

$$x(x^3 - 216) = 0; \quad x(x^3 - 6^3) = 0; \quad x(x-6)(x^2 + 6x + 36) = 0;$$

x=0 або x=6, а інші два кореня комплексні, які нас не цікавлять.

$$x_1 = 0; \ \ y_1 = \frac{x_1^2}{6} = \frac{0^2}{6} = 0;$$

$$x_2 = 6; \ \ y_2 = \frac{x_2^2}{6} = \frac{6^2}{6} = 0;$$

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x; \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36; \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y;$

3. Поставимо тепер сюди спочатку першу пару розв'язків, а потім другу і визначимо числа А, В, С і Δ. Для першої пари розв'язків:

$A = 12 \cdot 0 = 0; \quad B = -36; \ C = 12 \cdot 0 = 0$

Для другої пари розв'язків:

$A = 12 \cdot 6 = 72; \ B = -36; \ C = 12 \cdot 6 = 72$

4.Складемо вираз для першої пари:

$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - 36^2 = -1296$.

Так як $\Delta < 0$, то прі x=0 і y=0 функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Так як $\Delta > 0$, то екстремум при x=6; y=6 $\in$.

Так як A=72>0, то маємо мінімум.

Складемо вираз для другої пари: $\Delta = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - (-36)^2 = 3888$

Щоб визначити мінімальне значення функції, підставимо в неї x=6,y=6 і отримаємо $z(6;6) = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 430 = -2$

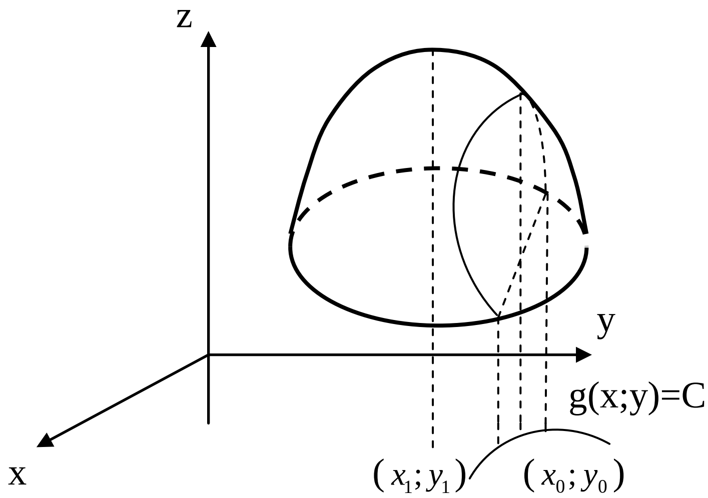
Відповідь: Zmin=-2

2. Умовний екстремум функції.

Розглянемо задачу, коли екстремум функції шукається не на всій області визначення, а на множині, що задовольняє деякій умові.

Нехай розглядається функція z=f(x;y), аргументи x,y якої задовольняють умові g(x,y)=C, званому рівнянням зв'язку.

На малюнку зображена точка умовного максимуму ($x_0; y_0$). Очевидно, що вона не є точкою безумовного екстремуму функції z=f(x;y) (на малюнку це точка ($x_1; y_1$)



Найбільш простим способом знаходження умовного екстремуму функції двох змінних є зведення задачі до відшукання екстремуму функції однієї змінної.

Приклад. Знайти точки максимуму і мінімуму функції $z = x^2 + 2y^2$ за умови $3x + 2y = 11$

Розв'язок.

Висловимо з рівняння $3x + 2y = 11$ у через х і підставимо отриманий вираз $y = \frac{11 - 3x}{2}$ в функцію z. Отримаємо $z \; = x^2 + 2\left(\frac{11 - 3x}{2}\right)^2$ або $z = \frac{11}{2}\left(x^2 - 6x + 11\right)$. Ця функція має єдиний мінімум при $x_0 = 3$.

Відповідне значення функції $y_0 = \frac{11 - 3x_0}{2} = \frac{11 - 3 \cdot 3}{2} = 1$. Таким чином, (3, 1) - точка умовного екстремуму (мінімуму).

У розглянутому прикладі рівняння зв'язку g(x,y)=C виявилося лінійним, тому його легко вдалося розв'язати щодо однієї зі змінних. Однак у більш складних випадках зробити це не вдається. Для відшукання умовного екстремуму в загальному випадку використовується метод множників Лагранжа (цей випадок в програму не входить і нами не розглядається)

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення екстремуму функції.

2. Сформулюйте правило визначення екстремуму функції двох аргументів z=f(x;y).
3. Знайти екстремум функції $z = x^2 - xy + y^3 - 5x$. Відповідь: Zmin=-8; x=3;y=1
4. Дайте визначення рівняння зв'язку.
5. Сформулюйте найбільш простий спосіб знаходження умовного екстремуму функції двох змінних
6. Знайти точки екстремуму функції $z = x^2 + y^2$ за умови x+y=2. Відповідь: (1; 1) - точка мінімуму.