Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Обчислення площ і об'ємів за допомогою подвійного інтеграла.

План лекції

1) Обчислення площ плоских фігур.
2) Обчислення об'ємів тіл.

1. Обчислення площ плоских фігур.

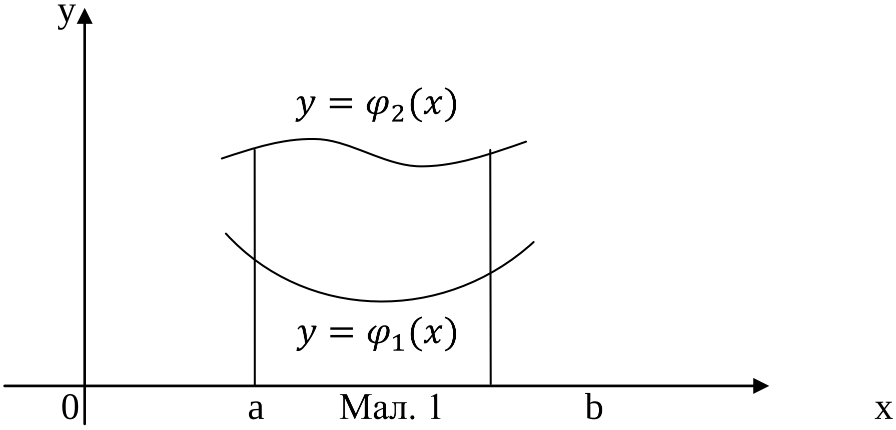
Площа плоскої фігури, обмеженої областю *D* знаходиться за формулою

$$S = \iint_D dxdy \qquad (1)$$

Вираз у правій частині формули (1) називається подвійним інтегралом.

Якщо область *D* визначена, наприклад, нерівностями $a \leq x \leq b$,

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \quad \text{(мал. 1)}$$



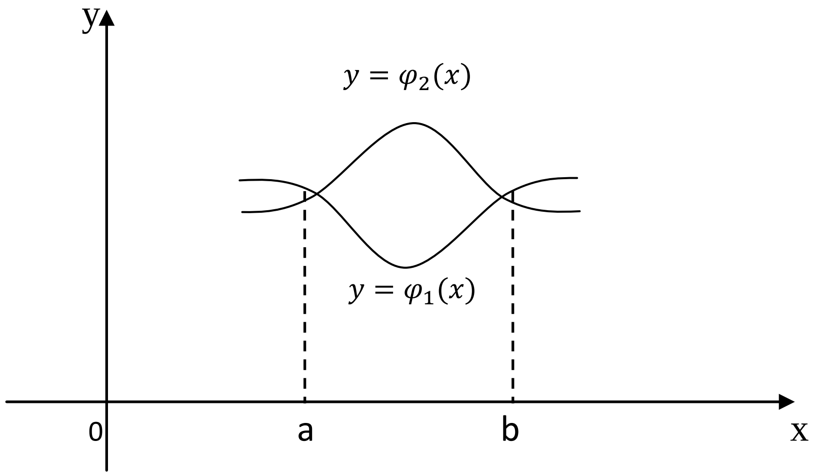
Мал. 1

Інтеграл у правій частині формули (2) також називається повторним, або двократним. Перший інтеграл в правій частині формули (2) називається зовнішнім інтегралом, а другий інтеграл формули (2) називається внутрішнім. Зовнішній інтеграл характеризує розташування даної плоскої фігури уздовж осі *Ox*, а внутрішній інтеграл характеризує розташування фігури уздовж осі *Oy*.

Схема обчислення площі фігури, зображеної на мал.1 така:

1) Обчислення за формулою (2) слід починати з внутрішнього інтеграла;
2) Потім знаходиться зовнішній інтеграл від вираження, отриманого в результаті обчислення внутрішнього інтеграла.

Якщо ж потрібно знайти площу фігури, зображеної на мал. 2, то знаходять ще границі інтегрування a і b з рівняння $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$



Мал.2

Перед обчисленням повторного інтеграла бажано побудувати графік функції $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$, що обмежують плоску фігуру, площу якої треба знайти. Це допоможе заздалегідь дізнатися приблизну відповідь візуальним способом, що дуже важливо для самоконтролю.

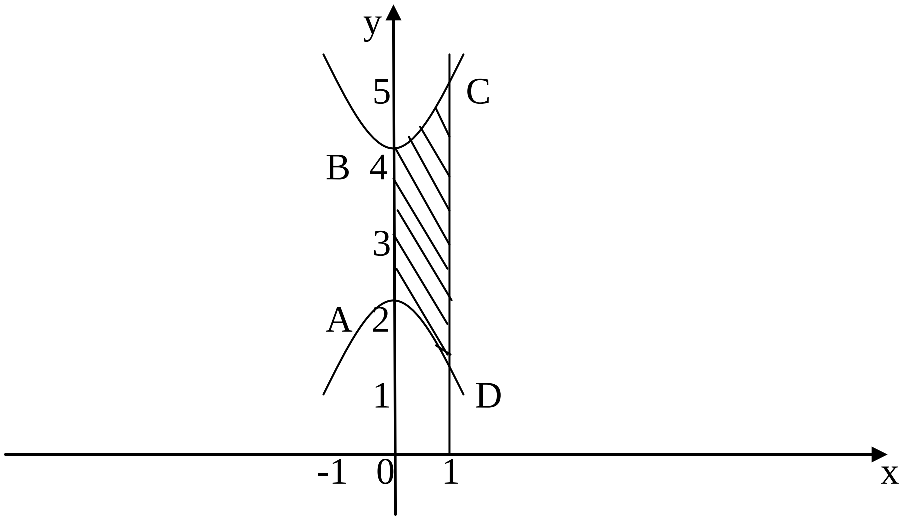
Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 + 4, y = = -x^2 + 2 = 0, x = 1.$

Розв'язок

1) Будуємо графіки функцій, заданих в умові прикладу (мал. 3).

x	y
-1	5
0	4
1	5

x	y
-1	1
0	2
1	1



a b Мал. 3

2) Знайдемо площу отриманої фігури ABCD за формулою

$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy,$ де $a = 0, b = 1, \varphi_1(x) = -x^2 + 2, \ \ \varphi_2(x) = x^2 +$

$+ 4$ (см. умову і малюнок).

а) обчислимо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_{-x^2+2}^{x^2+4} dy = y \Big|_{-x^2+2}^{x^2+4} = (x^2 + 4) — x^2 + 2 = x^2 + 4 + x^2 -$$

$$-2 = 2x^2 + 2$$

б) обчислимо зовнішній інтеграл від отриманої функції за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b (2x^2 + 2)dx = \int_0^1 (2x^2 + 2)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{2*1^3}{3} + 2*1\right) -$$

$$-\left(\frac{2*0^3}{3} + 2*0\right) = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3} \text{(кв. од.)}$$

Відповідь: $2\frac{2}{3}$ кв. од.

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 + 2, \ y ==$ $x + 4$.

1. Знайдемо границі інтегрування ***a*** і ***b***, розв'язуючи рівняння $x^2 + 2 = x + 4$:

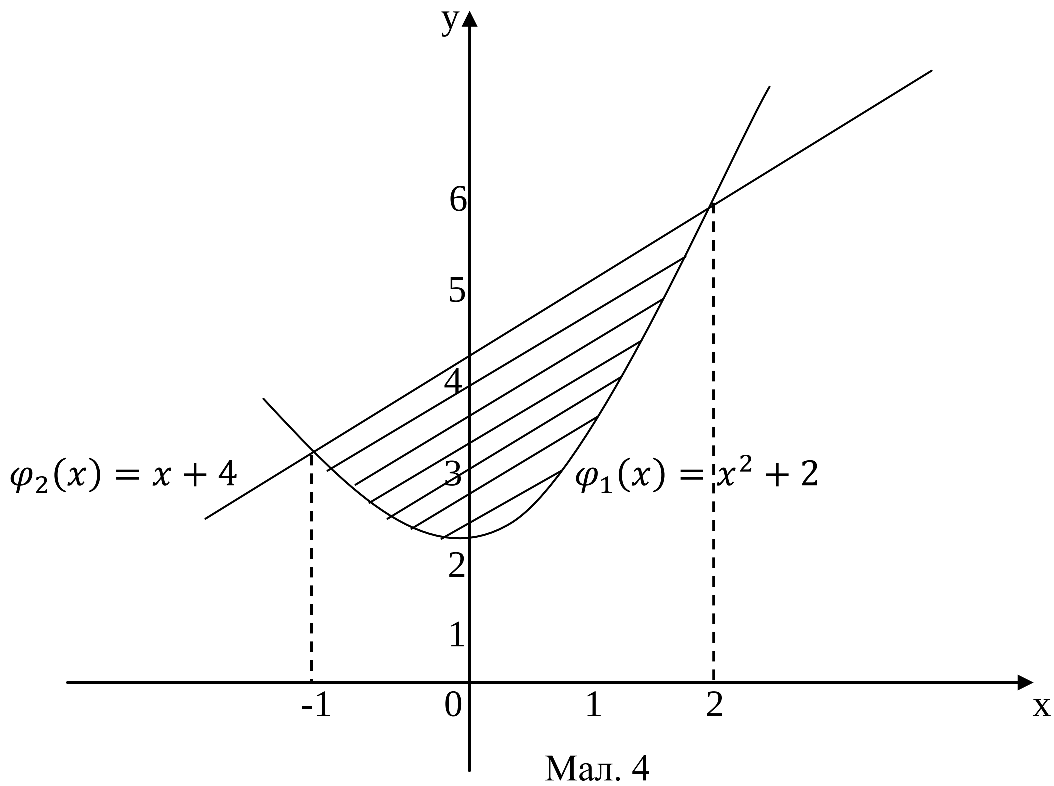
$x^2 + 2 = x + 4; \ x^2 + 2 - x - 4 = 0; \ x^2 - x - 2 = 0; x_1 = -1 = a, x_2 = 2 = b$

2. Побудуємо графіки функцій, заданих в умові приклада (мал. 4)

$y = x^2 + 2; y = x + 4.$

x	y
-1	3
0	2
1	3
2	6

x	y
-1	3
2	6



Мал. 4

3. Знайдемо площу заштрихованої фігури за формулою

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy, \text{ де } a = -1, b = 2, \varphi_1(x) = x^2 + 2;\ \varphi_2(x) = x + 4$$

а) Обчислимо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy = \int_{x^2+2}^{x+4} dy = y \Big|_{x^2+2}^{x+4} = (x + 4) - (x^2 + 2) = x + 4 - x^2 - 2 =$$

$$= -x^2 + x + 2$$

б) обчислимо зовнішній інтеграл від отриманої функції за формулою Ньютона – Лейбніца :

$$\int_b^a(-x^2+x+2)dx=\int_{-1}^2(-x^2+x+2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

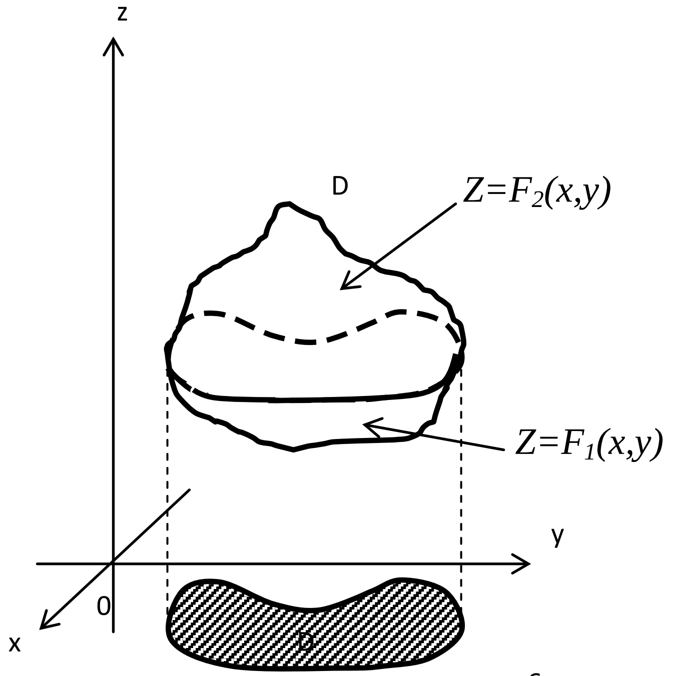
$$=\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\times 2\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\times(-1)\right)=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=$$

$$=\frac{8}{1}-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=8-3-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=4{,}5$$ (кв. од.)

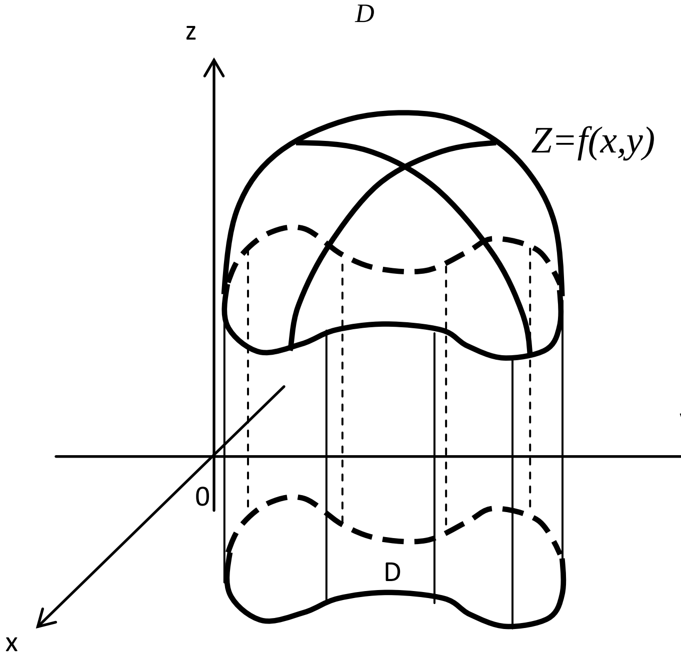
Відповідь: 4,5кв. од.

2. Обчислення об'ємів тіл.

Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею $Z=f(x,y)$, знизу площиною $Z=0$і з боків прямою циліндричною поверхнею, яка вирізає на площині XOYобласть D (малюнок 5), обчислюється по формулі$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$



мал. 6



мал. 5

Таке циліндричне тіло по іншому називають циліндроїдом, або циліндричним брусом. Якщо верхня основа циліндроїду є площина паралельна нижній основі, то циліндроїд називається циліндром. Прикладом циліндру служить круговий циліндр, розглядаємий у середній школі. Якщо тіло, об'єм якого шукається, обмежене зверху поверхнею $Z=F_2(x,y)\geq 0$, а знизу – поверхнею $Z=F_1(x,y)\geq 0$, причому проекції обох поверхонь на площину XOY є областю D (малюнок 6), то об'ємVцього тіла дорівнює різниці об'ємів двох циліндроїдів; перший циліндроїд має нижньою основою область D, а верхньою – поверхню $Z=F_2(x,y)$; другий циліндроїд має нижньою основою також область D, а верхньою - поверхню $Z=F_1(x,y)$. Тому об'ємVдорівнює різниці двох подвійних інтегралів:

$V=\iint\limits_D F_2(x,y)dxdy$ - $\iint\limits_D F_1(x,y)dxdy$або

$V = \iint\limits_D (F_2(x,y) - F_1(x,y))dxdy$

Приклад. Знайти $V = \iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$, де D- квадрат $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$

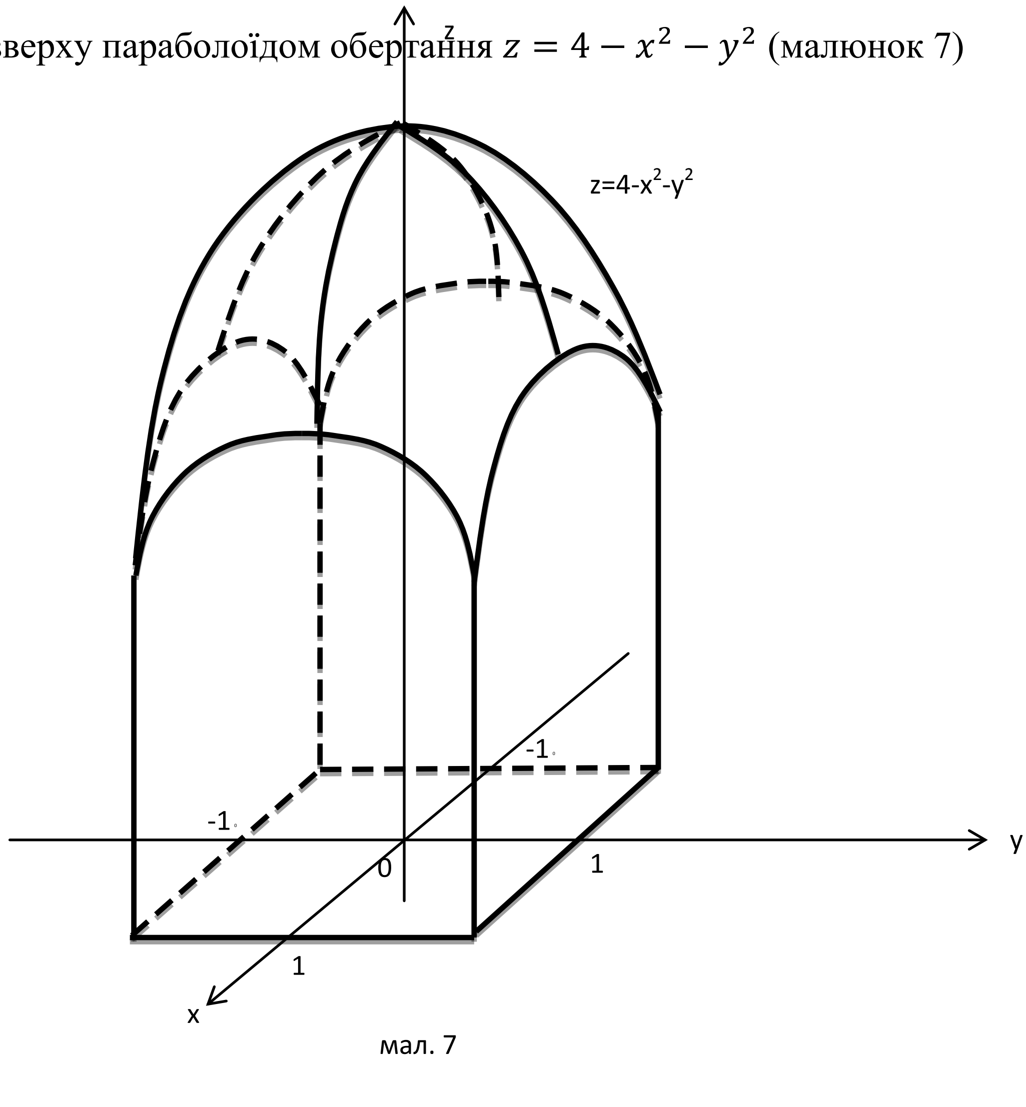
Розв'язок

Розставляючи границі інтегрування будемо мати $V = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} (4 - x^2 - y^2)dy$

Враховуючи симетрію тіла відносно вісі Oz, для зручності знайдемо четверту частину циліндроїду, а потім отриманий результат помножимо на 4.

1. $\int_0^1 (4 - x^2 - y^2)dy = (4y - x^2y - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^1 = 4 - x^2 - \frac{1}{3}$
2. $\int_0^1 \left(4 - x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x\right)\Big|_0^1 = 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$
3. $V = 4 \times \frac{10}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ (куб. од.)

Отже, ми обчислили об’єм циліндроїду з квадратною нижньою основою, обмеженою зверху параболоїдом обертання $z = 4 - x^2 - y^2$ (малюнок 7)



мал. 7

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення подвійного і повторного інтегралу.
2. Який інтеграл називається зовнішнім, а який внутрішнім?
3. По яким схемам обчислюється площина фігур, зображених на малюнках 1 і 2?
4. Чому важливо перед обчисленням повторного інтегралу побудувати графіки функцій, заданих в умові завдання?
5. По якій формулі обчислюється об'єм циліндроїду?
6. Як знайти об'єм тіла, обмеженого зверху і знизу поверхнями $Z=F_2(x,y) \geq 0$ і $Z=F_1(x,y) \geq 0$відповідно, причому проекції обох поверхонь на площину XOY є областьD.
7. Обчислити $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x-y)dy$.