Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Диференціальні рівняння першого порядку.

План лекції.

1.Поняття диференціального рівняння.

2.Сфера застосування диференціальних рівнянь.

3.Диференціальне рівняння першого порядку з розділеними і з поділяючими змінними.

1. Поняття диференціального рівняння.

У шкільному курсі математики ми неодноразово зустрічалися з різними рівняннями: алгебраїчними, показовими, тригонометричними і т.д. Ці рівняння об'єднує те, що в них невідомими є числа.

В математиці і її додатках іноді доводиться розглядати функціональні рівняння, розв’язками яких служать невідомі функції. До функціональних рівнянь відносяться, зокрема, диференціальні рівняння.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що містить похідні шуканої функції або її диференціали.

Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти таку функцію, підстановка якої в це рівняння звертає його у тотожність. Ця функція називається розв'язком диференціального рівняння.

Які з перерахованих функцій являють собою розв'язок диференціального рівняння $y' = x$:

a) $y = x + 2$;
b) $y = x^2 - 1$;
c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$;
d) $y = \frac{x^2}{2} + 5$?

Знайдемо тепер спільний розв'язок диференціального рівняння $y' = x$.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = x$ або $dy = xdx$. Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int dy = \int xdx$; $y + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$;

$y = \frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 = \frac{x^2}{2} + C$

Перевірка. $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = \frac{2x}{2} + 0 = x$; $x = x$.

Відомо, що функція $y = \frac{x^2}{2} + C$ задає сімейство парабол, зрушених друг щодо друга по осі ординат. З цього сімейства можна виділити одну конкретну параболу, якщо задати початкові дані, наприклад, координати точки, через яку повинна проходити ця парабола. Нехай, скажімо, це точка M(0;3); тоді рівняння шуканої параболи прийме вигляд $y = \frac{x^2}{2} + 3$. Ця функція також являє собою розв'язок даного диференціального рівняння. Розв'язок, що містить довільну сталу C, називається загальним розв'язком диференціального рівняння. У розглянутому прикладі $y = \frac{x^2}{2} + C$ - загальний розв'язок рівняння $y' = x$.

Розв'язок, в який підставлено числове значення C, називається окремим розв'язком диференціального рівняння. Значення C, обчислюється при підстановці початкових даних в загальний розв'язок. Так, функція $y = \frac{x^2}{2} + 3$ є окремий розв'язок диференціального рівняння $y' = x$.

Геометрично частинний розв'язок представляється однією інтегральною кривою, загальний розв'язок - сукупністю інтегральних кривих.

Завдання відшукання конкретного окремого розв'язання даного диференціального рівняння за початковими даними називається задачею Коші.

2. Сфера застосування диференціальних рівнянь.

Широке поширення диференціальних рівнянь в природознавстві пояснюється тим, що багато явищ і процесів, що відбуваються в природі, описуються звичайними диференціальними рівняннями. В даний час діапазон застосування диференціальних рівнянь дуже широкий. З їх допомогою розв'язуються завдання математики, фізики, хімії, біології, електротехніки, економіки, технології виробництва і багатьох інших сфер людської діяльності.

Диференціальні рівняння виникають в тих випадках, коли досліджуються такі величини, як швидкість протікання процесу, зміни швидкості і т. п.

За допомогою диференціальних рівнянь або систем таких рівнянь можна створити математичну модель досліджуваного фізичного, хімічного або біологічного процесу. Розв'язання цих рівнянь дозволяє передбачити властивості досліджуваного явища і прогнозувати кінцевий результат.

Правда, це можливо лише в тому випадку, коли складене диференціальне рівняння абсолютно точно і повно відображає фізичну, хімічну чи біологічну сутність явища.

Скласти, а тим більше розв'язати такі рівняння вдається далеко не завжди. Тому часто диференціальні рівняння виявляються наближеними, що описують лише окремий випадок досліджуваного процесу.

Складання диференціальних рівнянь за умовою завдання нагадує складання алгебраїчних рівнянь, тільки в якості невідомого тут присутні похідні невідомої функції.

При складанні диференціального рівняння задачі використовують геометричний, фізичний або механічний зміст похідної.

Крім того, при складанні диференціального рівняння задачі в залежності від її умови використовують відомі закони фізики, хімії, механіки та інших наук, в яких виражена залежність між функцією, аргументом і похідної.

Наприклад, з механіки відомо, що швидкість, прискорення і шлях при прямолінійному русі зв'язані співвідношеннями:

$\upsilon(t) = S`(t), a(t) = \upsilon`(t) = S`(t).$

Наприклад, швидкість прямолінійно рухомої матеріальної точки в залежності від часу виражається формулою: $\upsilon(t) = 3t^2 - 2t$. Знайти закон руху, якщо при t=1сек., шлях S(t)=1м.

Розв’язок.

Так як $\upsilon(t) = S`(t)$, то складемо і розв’яжемо диференціальне рівняння $\upsilon(t) = 3t^2 - 2t$. Звідки $\int(3t^2 - 2t)dt = \frac{3t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} + c = t^3 - t^2 + c$. Далі використовуємо початкові умови: $1 = 1^3 - 1^2 + c$. Звідки випливає, що c=1. Остаточно, маємо $S(t) = t^3 - t^2 + 1$ - шуканий закон руху.

3. Диференціальні рівняння першого порядку з розділеними і з відокремлюваними змінними.

Визначення 1.

Рівняння виду $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, де $f(x)$ та $\varphi(y)$ - дані функції, називається рівнянням з розділеними змінними.

Розв'язок таких рівнянь виконується безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1.

Розв’язати рівняння $xdx + ydy = 0$.

Розв'язок.

Тут змінні розділени. Інтегруючи, отримаємо $\int x dx + \int y dy = C$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$; $x^2 + y^2 = 2C$. Так як C довільно, то можна позначити 2C через C^2, враховуючи, що ліва частина останньої рівності додатна. Тоді ця рівність прийме вигляд $x^2 + y^2 = C^2$. Це і є спільний розв'язок.

З геометричної точки зору ми отримаємо сімейство (сукупність) концентричних кіл з центром в початку координат і радіусом, рівним С.

Приклад 2.

Знайти окремий розв'язок диференціального рівняння $dy = (x^2 - 1)dx$, якщо $y = 4$ при $x = 1$.

Розв'язок.

Маємо $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + c$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + c$, звідки $c = \frac{14}{3}$.

Отже, отримуємо відповідь: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

Визначення 2.

Рівняння виду $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$, де $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ - задані функції, називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо обидві частини рівняння розділити на добуток $\varphi(x) \cdot F(y)$, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку з розділеними змінними.

$$\frac{f(x)F(y)dx}{\varphi(x) \cdot F(y)} + \frac{\varphi(x)\Phi(y)dy}{\varphi(x) \cdot F(y)} = \frac{0}{\varphi(x) \cdot F(y)}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx + \frac{\Phi(y)}{F(y)}dy = 0$$

Приклад 3.

Знайти загальний розв'язок рівняння $1 + y^{|} + y + xy^{|} = 0$

Розв'язок.

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + \frac{xdy}{dx} = 0$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx:

$$dx + dy + ydx + xdy = 0$$

$$(1 + y)dx + (1 + x)dy = 0$$

Розділимо обидві частини рівняння на $(1 + x)(1 + y)$

$$\frac{(1 + y)dx}{(1 + x)(1 + y)} + \frac{(1 + x)dy}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{0}{(1 + x)(1 + y)}$$

$$\frac{dx}{1 + x} + \frac{dy}{1 + y} = 0$$

Інтегруючи обидві частини рівності, маємо

$\int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dy}{1+y} = C_1$; $\ln|1 + x| + \ln|1 + y| = C_1$

Замінюємо C_1 на $\ln C$ (так як C_1 - будь-яке число): $\ln|1 + x| + \ln|1 + y| = \ln C$

$\ln((1 + x) \cdot (1 + y)) = \ln C$; $(1 + x)(1 + y) = C$; $1 + y = \frac{C}{1+x}$; $y = \frac{C}{1+x} - 1$

Відповідь: $y = \frac{C}{1+x} - 1$

Приклад 4.

Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2dy = y^2dx$

Розв'язок

Ділимо обидві частини рівняння на x^2y^2: $\frac{x^2dy}{x^2y^2} = \frac{y^2dx}{x^2y^2}$; $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$

Інтегруємо обидві частини рівняння: $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$; $\int y^{-2}dy = \int x^{-2}dx$;

$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + C$;

$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$; $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - C$; $y = \frac{x}{1-cx}$

Відповідь: $y = \frac{x}{1-cx}$

Закріплення нового матеріалу

1. Дайте визначення диференціального рівняння.
2. Що означає розв'язати диференціальне рівняння?
3. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння.
4. Яке розв'язування диференціального рівняння називається частинним?
5. Дайте геометричну інтерпретацію частинного і спільного розв'язання диференціального рівняння.
6. У чому полягає задача Коші?
7. Розкажіть про сферу застосування диференціальних рівнянь.
8. Дайте визначення диференціального рівняння першого порядку з розділеними змінними.
9. Дайте визначення диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.
10. Як розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку з розділеними і з відокремлюваними змінними?