Модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

Лекція Диференціальні рівняння другого порядку.

План лекції

1. Диференціальне рівняння другого порядку та його загальне розв′язання.
2. Задача Коши для найпростішого диференціального рівняння другого порядку.
3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

1. Диференціальне рівняння другого порядку та його загальне розв′язання.

Рівняння, що містить похідні або диференціали другого порядку, називаються диференціальними рівняннями другого порядку. Диференціальне рівняння другого порядку, дозволене відносно y'', має вид

$$y''=f(x,y,y').$$

Найпростішим рівнянням другого порядку є рівняння виду

$$y''=f(x).$$

Таке рівняння розв′язується двократним інтегруванням:

1. $y'=\int f(x)dx=F(x)+C_1$;
2. $y=\int (F(x)+C_1)dx=\int F(x)dx+\int C_1dx$ *або*

   $y=\phi(x)+C_1x+C_2$

Отже, отримаємо загальне розв′язання даного диференціального рівняння, що містить дві похідні сталі C_1 і C_2.

Приклад. Знайти загальне розв’язання рівняння $y''=4x$

Розв′язок.

1. $y'=\int 4xdx=2x^2+C_1;$
2. $y=\int (2x^2+C_1)dx=\frac{2}{3}x^3+C_1x+C_2$ - загальне розв′язання.
3. Отриманий результат перевіримо диференціюванням:

$y'=(\frac{2}{3}x^3+C_1x+C_2)= 2x^2+C_1;$

$y''=(2x^2+C_1)'=4x$

Відповідь: $y=\frac{2}{3}x^3+C_1x+C_2$.

2. Задача Коши для найпростішого диференціального рівняння другого порядку.

Задача Коши для найпростішого диференціального рівняння другого порядку складається в тому, щоб знайти розв′язок, що задовольняє початковим умовам.

Приклад 1. Знайти розв′язок рівняння $y''=2$, задовольняючий наступним початковим умовам: $y=1$ та $y'=2$ *при* $x=0$.

Розв′язок

1. $y'=\int 2dx=2x+C_1$
2. $y=\int(2x+C_1)dx=x^2+C_1x+C_2$ – загальний розв′язок.
3. Використовуючи початкові умови, маємо

$$\begin{cases} y'=2x+C_1, \\ y=x^2+C_1x+C_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=2*0+C_1, \\ 1=0+C_1*0+C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=1 \end{cases}$$

Отже, шуканий розв′язок має вид:

$y=x^2+2x+1$ або $y=(x+1)^2$.

Таким чином для розв′язання диференціального рівняння виду $y''=f(x)$ використовують наступний алгоритм:

1. Інтегрують обидві частини рівняння та знаходять y'.
2. Інтегруючи y' , знаходять загальний розв′язок, що містить дві довільні постійні.
3. Якщо потребується знайти окремий розв′язок (знайти розв′язок задачі Коши), то визначають C_1 і C_2 з початкових умов і підставляють їх в загальний розв′язок.

У задачах, розв′язок яких приводить до інтегрування диференціальних рівнянь, використовують відомі закони фізики, механіки та інших наук.

При розв′язанні задач спочатку треба скласти диференціальне рівняння по умовам задачі, а потім знайти розв′язок цього рівняння по загальному правилу.

Приклад 2. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a=6t-4$. При $t=0$ початкова путь $S_0=0$, початкова швидкість $V_0=4$. Знайти швидкість і пройдену путь як функцію часу.

Розв′язок.

Відповідно умові, маємо $S''=6t-4$.

Інтегруючи обидві частини цього рівняння , отримаємо $V(t)=S'(t)=3t^2-4t+C_1$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, отримаємо $S(t)=t^3-2t^2+C_1t+C_2$

C_1 і C_2 визначимо з початкових умов.

$$\begin{cases} 4=3\times0^2-4\times0+C_1, \\ 0=0^3-2\times0^2+C_1\times0+C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=0 \end{cases}$$

Відповідь: $v(t) = 3t^2 - 4t + 4;\ s(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Означення 1.Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами називається рівняння виду

$$y''+py'+qy=0,$$

де p і q постійні величини.

Означення 2. Рівняння $k^2+pk+q=0$ називається характеристичним для даного диференціального рівняння $y''+py'+qy=0$.

Щоб отримати це рівняння, достатньо замінити y'' на k^2, y' на k, y на 1.

Відомо, що при розв′язуванні квадратного рівняння можна отримати корені наступних видів:

1) Дійсні і різні ($D>0$)
2) Дійсні і рівні ($D=0$).

Кожному виду коренів квадратного рівняння відповідає свій вид розв′язування диференціального рівняння $y''+py'+qy=0$.

Алгоритм розв′язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Диференціальне рівняння	$y'' + py' + qy = 0$	
Характеристичне рівняння	$k^2+pk+q=0$	
Дискримінант	$D>0$	$D=0$
Корені характеристичного рівняння	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2 = k$
Загальне розв’язання	$y=C_1e^{k_1x}+C_2\, e^{k_2x}$	$y=e^{kx}\times(C_1+ C_2\times x)$, де $e \approx 2,72$

Розглянемо перший випадок, коли $D>0$

Приклад 1. Розв′язати рівняння $y'' + 3y' + 2y = 0$

Розв′язок

Складемо і розв′яжемо характеристичне рівняння $k^2+3k+2=0.$

$D = b^2-4ac = 9-4\times1\times2 = 1$

$k_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{3-1}{2}=1;\ \ k_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{3+1}{2}=2$

Відповідь: $y=C_1e^{x}+C_2\, e^{2x}$

Розглянемо другий випадок, коли $D=0$

Приклад 2. Розв′язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Розв′язок

Складемо і розв′яжемо характеристичне рівняння $k^2+6k+9=0$

$D = b^2-4ac =36-4\times1\times9=0$

$k_1= k_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2}=-3$

Відповідь: $y=e^{-3x}\times(C_1+ C_2\times x)$

Закріплення нового матеріалу.

1. Дайте визначення диференціального рівняння другого порядку.
2. Запишіть загальне розв’язання найпростішого диференціального рівняння другого порядку.
3. У чому полягає задача Коши.
4. Який алгоритм використовують при розв’язанні найпростішого диференціального рівняння другого порядку?
5. Дайте визначення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.
6. Дайте визначення характеристичного рівняння. Як отримати це рівняння?
7. Складіть алгоритм розв’язання лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.